

N° d'ordre :

104

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND

par

Ibrahim H A J J

pour obtenir

le grade de Docteur Ès-Sciences

Sujet de la Thèse : *Essai d'une théorie des demi-anneaux et des demi-modules.*

soutenue le 20 Juin 1969 devant la Commission d'examen.

M. GUILLAUME *Président*

Mme BESSERRE
M. KRASNER
M. MICALI

} *Examineurs*

N. d'ent. p. l'écrit

~~C.N.R.S.~~

104

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND

par

Ibrahim H A J J

pour obtenir

le grade de Docteur Ès-Sciences

Sujet de la Thèse : *Essai d'une théorie des demi-anneaux et des demi-modules.*

soutenue le 20 Juin 1969 devant la Commission d'examen.

M. GUILLAUME *Président*

Mme BESSERRE
M. KRASNER
M. MICALI

} *Examineurs*



PERSONNEL FACULTE DES SCIENCES ANNEE SCOLAIRE 1968-1969

Doyen : M. SAUREL Jean
1er Assesseur : M. KOHLMULLER Robert
2ème Assesseur : M. RAOULT Gaston

PROFESSEURS

M. RAMBAUD René	Chimie	T
M. BLANC Eugène	Mathématiques Pures	T
M. ROQUES Maurice	Géologie	T
M. LAPADU-HARGUES Pierre	Minéralogie	T
M. LUTZ Hubert	Biologie Animale	T
M. RAOULT Gaston	Physique	T
M. CHAMPAGNAT Paul	Physiologie Végétale	T
M. DUPLESSIS-KERGOMARD Alain	Chimie	T.P.
M. AVAN Jean-Louis	Physique Expérimentale	T
Mme HENNEQUIN Françoise	Mathématiques Pures	T
Mlle BERTHET Ginette	Physique	T.P.
M. LOISEAU Jean	Botanique	T
M. COMBE René	Physique	T.P.
M. DE PUYTORAC Pierre	Zoologie	T
Mme AVAN Madeleine	Physique	T.P.
Mlle DONDON Marie-Louise	Chimie Physique	T.P.
M. DELOST Paul	Physiologie Animale	T.P.
M. SAUREL Jean	Physique	T.P.
M. VIALARD André	Chimie	T.P.
M. KOHLMULLER Robert	Chimie minérale	T
M. GUILLAUME Marcel	Algèbre	T
M. COMBE Jean	Physique	T
M. HENNEQUIN Paul	Mathématiques Appliquées	T
M. L'HERITIER Philippe	Génétique	T
M. VESSIERE Roger	Chimie Organique	T

PROFESSEUR ASSOCIE

M. ROCOS Pantelis	Mathématiques
-------------------	---------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. PETERLONGO Jean-Marc	Géologie
M. BAILLAUD Lucien	Botanique
M. BATHIER Marcel	Physique
Mlle DUCHER Suzanne	Chimie
M. FALGAS Maurice	Mathématiques Pures
M. ROCHE Jean	Physique (I.U.T.)
M. MARTINET Pierre	Chimie
M. MAISONNEUVE Jacques	Géologie
M. CAPESTAN Michel	Chimie
M. LENOIR Marcel	Mathématiques Pures
M. THOMAS Jean	Physique
M. BERNARD Maurice	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. ISABELLE Didier	Physique
M. CAUBERE Paul	Chimie
M. SOULAGE René	Géophysique générale
M. DUFAURE Jean-Pierre	Zoologie
M. BADRIKIAN Albert	Mathématiques Appliquées
M. COURDUROUX Jean-Claude	Botanique
M. ARIBAUD François	Mathématiques Pures
M. GRAIN Jean	Zoologie
Mme BESSERRE Anne-Marie	Mathématiques Pures
M. JEAN Claude	Physiologie Animale
M. MIGNOT Jean-Pierre	Zoologie
M. VELLEY G.	Psycho-physiologie
M. COUSSEINS Jean-Claude	Chimie
M. LEMAIRE Jacques	Chimie
M. LEVY	Génie électrique (I.U.T.)
M. PRORIOI	Génie électrique (I.U.T.)

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. CHADEYRAS Marcel	Mathématiques Pures
M. BOILLAT Guy	Mathématiques Pures
M. LE THANH PHONG	Mathématiques Pures
M. ROCHE Guy	Génie électrique (I.U.T.)
M. SCHMETTERER Léopold	Mathématiques Appliquées

ATTACHEE PRINCIPALE

Mme CHOPART Marie-Louise

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur KRASNER. Il m'a beaucoup aidé à mettre les choses dans le bon ordre et m'a suggéré des idées riches en perspectives. Il m'a toujours été compréhensif. Qu'il veuille accepter mes remerciements les plus sincères.

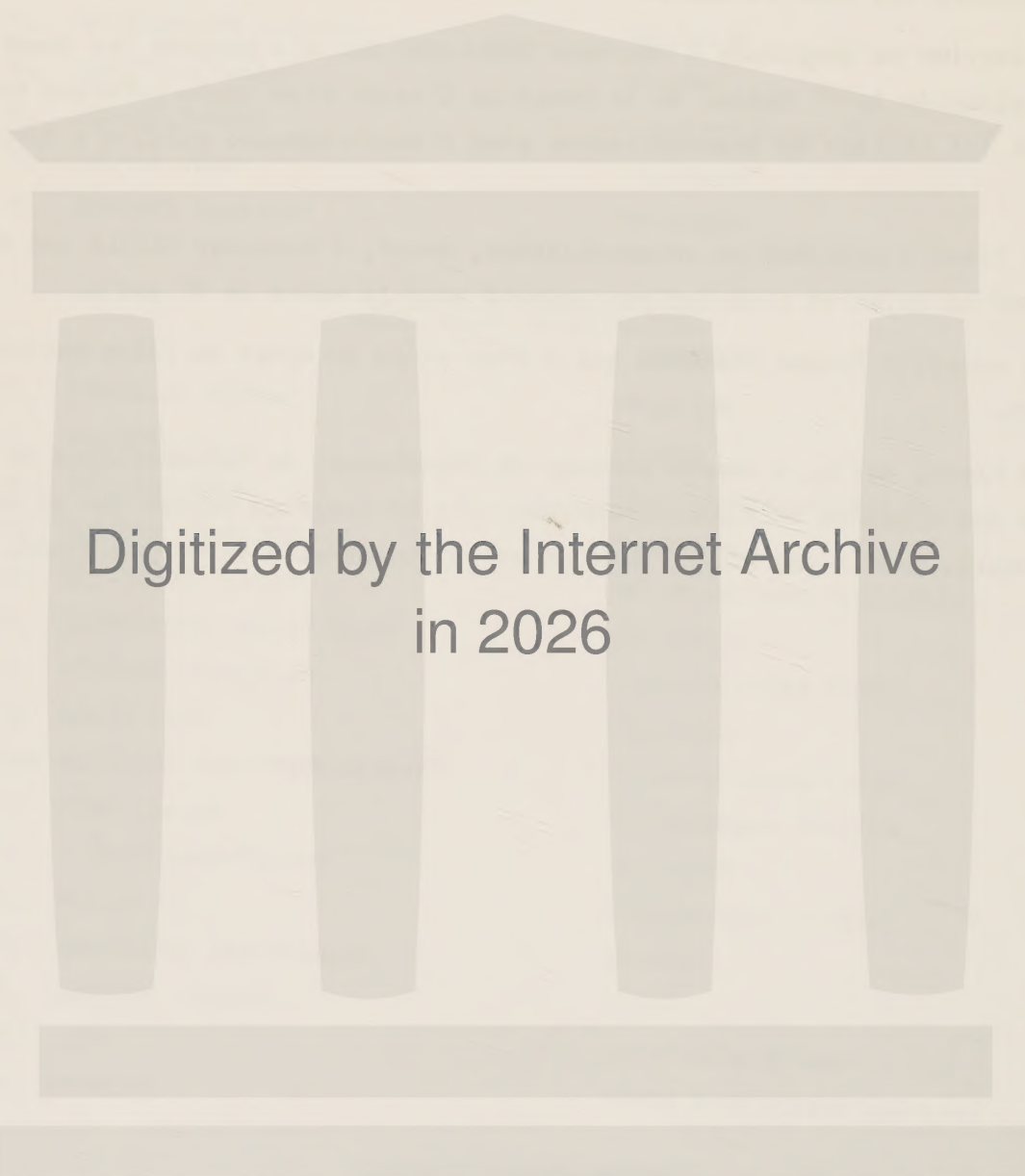
J'exprime ma gratitude à Monsieur GUILLAUME qui m'a proposé les questions tenant place de la 2^e thèse. Je le remercie d'avoir bien voulu présider mon jury. Je lui exprime ma reconnaissance pour l'encouragement qu'il m'a toujours donné.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance, aussi, à Monsieur MICALI qui m'a lancé sur ce sujet et a dirigé mon travail pour la thèse de 3^e cycle.

Je remercie Madame BESSERRE qui a bien voulu accepter de faire partie de mon jury.

Je tiens, enfin, à rendre hommage au Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand. J'y ai toujours oublié que je suis un étranger. Encore une fois j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude.

Ibrahim HAJJ



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548607_0011

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de certains aspects d'une théorie des demi-anneaux et des demi-modules. Un demi-anneau est la structure compositionnelle à deux opérations partout définies : une addition $(a,b) \mapsto a + b$, et une multiplication $(a,b) \mapsto ab$ telles que son support A soit un demi-groupe à la fois pour l'addition et la multiplication ; l'addition étant en plus commutative et la multiplication doublement distributive par rapport à l'addition. Autrement dit, on a :

- 1 - $(\forall (a,b) \in AxA) \quad [(a + b) \in A]$
- 2 - $(\forall (a,b,c) \in AxAxA) \quad [a + (b + c) = (a + b) + c]$
- 3 - $(\forall (a,b) \in AxA) \quad [a + b = b + a]$
- 4 - $(\forall (a,b) \in AxA) \quad [ab \in A]$
- 5 - $(\forall (a,b,c) \in AxAxA) \quad [a(bc) = (ab)c]$
- 6 - $(\forall (a,b,c) \in AxAxA) \quad [a(b + c) = ab + ac \text{ et } (b + c)a = ba + ca]$

Un A-demi-module à gauche est un ensemble M où sont définies partout une addition $(x,y) \mapsto x + y$, et une multiplication externe à opérateurs dans $A: (a,x) \mapsto ax$, les deux lois vérifiant :

- 1 - $(\forall (x,y) \in MxM) \quad [(x + y) \in M]$
- 2 - $(\forall (x,y,z) \in MxMxM) \quad [(x + y) + z = x + (y + z)]$
- 3 - $(\forall (x,y) \in MxM) \quad [x + y = y + x]$
- 4 - $(\forall a \in A) (\forall x \in M) \quad [ax \in M]$
- 5 - $(\forall (x,y) \in MxM) (\forall a \in A) \quad [a(x + y) = ax + ay]$
- 6 - $(\forall (a,b) \in AxA) (\forall x \in M) \quad [(a + b)x = ax + bx]$
- 7 - $(\forall (a,b) \in AxA) (\forall x \in M) \quad [(ab)x = a(bx)]$

Un demi-anneau A (resp. un demi-module M) sera dit un semi-anneau (resp. semi-module) si, et seulement si l'addition de A (resp. de M) est simplifiable, c'est-à-dire $[a + c = b + c] \Rightarrow [a = b]$ (resp. $[x + z = y + z] \Rightarrow [x = y]$).

Nous utiliserons dans ce travail une notion très importante dans les demi-modules (resp. les demi-anneaux). C'est la notion de congruence et plus spécialement la notion de congruence additivement simplifiante. Une congruence sur un demi-module M est une relation d'équivalence R sur M compatible avec l'addition et la multiplication externe, c'est-à-dire :

- (i) - $[xRy \text{ \& } x'Ry'] \Rightarrow [(x + x')R(y + y')]$
- (ii) - $[xRy] \Rightarrow (\forall a \in A) \quad [(ax)R(ay)]$

Une congruence à gauche (resp. à droite) sur le demi-anneau A est une congruence du A -demi-module à gauche (resp. à droite) A . Une congruence bilatère sur A est relation d'équivalence sur A qui est, à la fois, une congruence à gauche et une congruence à droite.

Une congruence R sur un A -demi-module M sera dite additivement simplifiante si et seulement si $[(x + z)R(y + z)] \Rightarrow [xRy]$. Comme on ne parlera pas dans ce travail de congruences multiplicativement simplifiantes (c'est-à-dire telles que $[(ax)R(ay)] \Rightarrow [xRy]$) on dira, pour alléger, simplifiante au lieu d'additivement simplifiante.

Le travail commence par une étude des congruences sur un A -demi-module. Nous y explicitons la clôture simplifiante d'une congruence donnée R (c'est-à-dire la congruence la plus fine qui est simplifiante et moins fine que R . Nous montrons qu'une telle congruence existe). Nous définissons certaines opérations sur les congruences et nous donnons la description explicite des clôtures simplifiantes des congruences ainsi définies (ex. : la congruence engendrée par une partie de $A \times A$, la congruence composée d'une famille de congruences, produit d'une congruence à gauche sur A par une congruence sur M , l'image et l'image réciproque d'une congruence par un homomorphisme). Nous y établissons certains théorèmes d'homomorphisme et nous finissons le chapitre I par l'étude de quelques congruences qui nous seront utiles dans la suite.

Après cette première approche des congruences, on peut suivre deux voies différentes : soit chercher à construire directement la théorie en se guidant par la théorie des anneaux et des modules, soit chercher à lier les demi-anneaux et les demi-modules, d'une certaine manière, aux anneaux et aux modules.

Au début, je me suis lancé dans la première voie, encouragé par certains articles sur les demi-anneaux et plus particulièrement par (4). J'ai pu établir la quasi-totalité des résultats que contient ce travail, au prix d'un travail technique assez délicat. La seconde voie consiste à établir un certain foncteur défini sur la catégorie des demi-anneaux (resp. des demi-modules), et à valeurs dans celle des anneaux (resp. des modules). D'une façon plus précise, soit A un demi-anneau ; on cherche à construire, à partir de A , une sorte d'"anneau des fractions additives". On commence par définir sur $A \times A$ une relation d'équivalence par :

$$(a, b) \sim (a', b') \iff (\exists t \in A) ; [a + b' + t = a' + b + t]$$

On considère ensuite $Ax/\sim$ et on y définit la structure suivante :

$$(i) - \overline{(a,b)} + \overline{(a',b')} = \overline{(a + a', b + b')}$$

$$(ii) - \overline{(a,b)} \overline{(a',b')} = \overline{(aa' + bb', ab' + ba')}$$

en désignant par $\overline{(a,b)}$ la classe de (a,b) modulo $\sim$ et en ayant en vue que (a,b) représente $a-b$. On notera, d'ailleurs, cette classe par $(a - b)$

$Ax/\sim$, muni de cette structure, est un anneau que nous noterons $S(A)$. On établit ensuite un homomorphisme canonique θ de A dans $S(A)$ en posant $\theta(a) = (a + b, b)$ où b est quelconque dans A , ce qui est bien défini.

Une question se pose alors : quels sont les demi-anneaux qui engendrent dans le sens décrit ci-dessus, un anneau donné ? Une certaine remarque et un préordre canonique défini sur $S(A)$ permettent de réduire ce problème à celui de la recherche des préordres filtrants à droite et compatibles avec l'addition et la multiplication par les éléments supérieurs ou égaux à zéro, et qui peuvent être définis sur l'anneau en question.

Après cela, étant donné un A -demi-module M , on construit un $S(A)$ -module que nous noterons $S(M)$, de la même manière. On établit, ensuite, un semi-morphisme $\lambda : M \longrightarrow S(M)$ c'est-à-dire une application qui est compatible avec l'addition et qui vérifie : $\lambda(ax) = \theta(a) \lambda(x)$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$.

C'est ainsi que nous définissons le foncteur modélisation décrit et étudié dans le chapitre III. Ce foncteur est très commode : il commute avec le produit direct, le coproduit, le produit tensoriel, la formation du demi-anneau des polynômes et celle du demi-anneau des matrices carrés $n \times n$. Il est additif et exact. Il établit une bijection de l'ensemble des congruences (resp. des congruences à gauche, à droite, bilatères) simplifiantes définies sur M (resp. sur A) sur celui des sous-modules (resp. d'idéaux à gauche, à droite, bilatère) de $S(M)$ (resp. de $S(A)$). Il a aussi un certain nombre de propriétés que nous étudierons au fur et à mesure de nos besoins.

Une autre façon de construire $S(A)$ (resp. $S(M)$) consiste à passer, d'abord, à A^* (resp. M^*) quotient de A (resp. M) par la plus fine congruence simplifiante, qui existe d'ailleurs, Z_A (resp. Z_M). On obtient un semi-anneau (resp. un semi-module). On applique ensuite, une construction analogue à celle du groupe engendré par un semi-groupe qui s'y plonge. On définit, ensuite sur ce groupe une multiplication

(resp. une multiplication externe) qui en fait un anneau (resp. un module). Ceci est possible grâce à la distributivité de la multiplication de A (resp. de la multiplication externe sur M) par rapport à l'addition de A (resp. de M).

A l'aide de ce foncteur on peut définir et étudier la notion de demi-modules et demi-anneaux noetheriens, celle de congruence simplifiante primaire sur un A -demi-module, l'existence et l'unicité de la décomposition de toute congruence simplifiante en intersection de congruences simplifiantes primaires moyennant les mêmes hypothèses que dans le cas des modules.

Nous avons, aussi, introduit plusieurs notions de radical d'un demi-anneau et nous avons étudié assez profondément l'une d'elle, que nous avons appelée Radical de Jacobson du demi-anneau et qui généralise une notion déjà introduite et étudié dans (I) et (4). Nous avons, aussi, étudié la structure des demi-anneaux artiniens semi-simples (c.à.d. dont le radical de Jacobson est réduit à Z_A) et avons établi l'analogue du théorème de Wedderburn-Artin.

Pour établir ces résultats, nous avons utilisé les résultats connus pour les anneaux et les modules. Nous nous sommes conformés pour les demi-modules et les demi-anneaux noethériens à Bourbaki (8) et (9), et pour le radical de Jacobson et les demi-anneaux artiniens à Jacobson (10).

Enfin, et en dernier chapitre, nous avons repris la notion de produit tensoriel de deux demi-modules, que nous avons introduit dans notre thèse de 3^e cycle dans le cas où A est commutatif. Dans ce chapitre, nous nous débarrassons de cette hypothèse et nous définissons le produit tensoriel d'un A -demi-module à droite E et un A -demi-module à gauche F . Nous étudions ensuite le comportement de ce produit tensoriel avec les suites exactes que nous avons déjà défini au chapitre II, qui n'est pas tout à fait un rappel, car la notion des suites exactes telle qu'elle y est définie est nouvelle. Nous établissons que le produit tensoriel de deux demi-modules se comporte, vis à vis des suites exactes, de la même manière que le produit tensoriel de deux modules. Ceci permettrait ultérieurement, une étude assez poussée des notions homologiques adaptées.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) - S. BOURNE : The Jacobson radical of semiring
Proc. Nat. Acad. Sc. t. 37 (1951)
 - (2) - S. BOURNE : On the semiradical of semiring
Proc. Nat. Acad. Sc. t. 44 (1958)
 - (3) - IIZUKA & NAKAHARA : A note on the semiradical of semiring
Kumamoto J. Sc. t. 4 (1959)
 - (4) - IIZUKA : On the Jacobson radical of semiring
Tohoku Math. J. t. II (1959)
 - (5) - ISEKI : Ideals in semiring. Proc. Japon Acad. t. 34 (1958)
 - (6) - ALMEIDA-COSTA : Sur la théorie générale des demi-anneaux
Séminaire DUBREIL. Année 1960/61 Fasc. 2
 - (7) - BOURBAKI : Algèbre Chapitre 2
 - (8) - BOURBAKI : Algèbre Chapitre 8
 - (9) - BOURBAKI : Algèbre Commutative Chapitre 4
 - (10)- JACOBSON : Structures of rings
 - (11)- ZARISKI & SAMUEL : Commutative Algebra Volume I
 - (12)- MICALI : Séminaires sur les catégories. Clermont-Ferrand - Année 1964/65
 - (13)- FREYD : Abelian Categories
 - (14)- KLASNER : Théorie non abélienne des corps de classe pour les extensions
galoisiennes des corps de nombres algébriques : bimatrices,
représentation des semi-groupes abéliens libres. C.R.A.S. t. 225
 - (15)- I. HAJJ : Sur les demi-modules. Thèse de 3^e cycle. Clermont-Ferrand.
-

CHAPITRE I .

Congruences sur un demi-module

§ 1 - Opérations sur les congruences :

1 - Définitions :

Soient A un demi-anneau unitaire et M un A - demi-module à gauche unitaire.

Définition : 1.1.1. : On appelle congruence sur M toute relation d'équivalence R sur M qui vérifie les deux axiomes suivants :

(c₁) - Pour tout (x,y) et tout (x', y') dans M x M :
$$[x R y \text{ et } x' R y'] \implies [(x + x') R (y + y')]$$

(c₂) - Pour tout (x,y) ∈ M x M et tout a ∈ A :
$$[x R y] \implies [(a x) R (a y)] .$$

L'axiome (c₁) est équivalent à l'axiome (c'₁) suivant : (c'₁) - Pour tout (x,y) ∈ M x M et tout z ∈ M : $[x R y] \implies [(x + z) R (y + z)]$.

Il est facile, en effet, de voir que (c₁) implique (c'₁).

Réciproquement, supposons R vérifier (c'₁) et supposons avoir x R y et x' R y', (c'₁) nous donne : (x + x') R (y + x') et (y + x') R (y + y')

La transitivité de R termine la démonstration.

Définition 1.1.2. : On dira qu'une congruence R sur M est simplifiante si, et seulement si elle vérifie l'axiome (S) suivant :

(S) - Pour tout (x,y) et (x', y') ∈ M x M :
$$[(x + x') R (y + y') \text{ et } x' R y'] \implies [x R y] .$$

Proposition , 1.1.1. : L'axiome (s) est équivalent à l'axiome (S') suivant :

(S') - Pour tout (x,y) ∈ M x M et tout z ∈ M :

$[(x + z) R (y + z)] \implies [x R y]$. Il est immédiat que (S) entraîne (S'). Réciproquement, supposons que R vérifie (S') et supposons avoir : (x + x') R (y + y') et x' R y'. L'axiome (c'₁) nous donne (x + x') R (y + y') et (x + x') R (x + y'). La transitivité

de R donne $(x + y') R (y + y')$ et l'axiome (S') achève la démonstration.

Exemples :

1 - Soit N un sous-demi-module de M. La relation notée $\equiv$ et définie par : Pour tout $(x, y) \in M \times M$: $x \equiv y (N) \iff$ il existe $(x', y') \in N \times N$ tel que :

$$x + x' = y + y'.$$

est une congruence sur M appelée la congruence forte modulo N.

N est contenue dans une même classe d'équivalence modulo $\equiv$. Cette classe sera notée $\bar{N}$. On dira que N est clos si, et seulement si l'on a : $N = \bar{N}$.

2 - La relation notée $[\equiv]$ et définie sur N par :

Pour tout $(x, y) \in M \times M$.

$x [\equiv] y (N) \iff$ il existe $(x', y') \in N \times N$ et $z \in M$ tels que :

$$x + x' + z = y + y' + z.$$

est une congruence simplifiante sur M, appelée la congruence modulo N. On la notera aussi R_N . N est contenu dans une même classe d'équivalence modulo N,

Cette classe sera notée $\hat{N}$. On dira que N est fortement clos si et seulement si l'on a : $N = \hat{N}$. Pour justifier cette appellation il suffit de remarquer qu'on a : $\bar{N} \subseteq \hat{N}$.

3 - La relation T suivante : Pour tout $(x, y) \in M \times M$: $x T y \iff$ il existe $t \in M$ tel que l'on a : $x + t = y + t$ est une congruence simplifiante sur M comme on peut facilement le vérifier. *Elle sera notée T_M*

Cette congruence T est contenue dans toutes les congruences simplifiantes sur M. En effet, soit R une telle congruence. On a : $x T y \implies$ il existe $t \in M$ tel que $x + t = y + t \implies (x + t) R (y + t) \implies x R y$ d'après l'axiome S'. On aura souvent à utiliser ce raisonnement.

4 - Soit $f : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans un autre A - demi-module M' . La relation sur M, notée R_f , et définie par : Pour tout $(x, y) \in M \times M$, $x R_f y \iff f(x) = f(y)$ est une congruence sur M. De plus, si M' est un A - semi-module, R_f est simplifiante.

Proposition 1.1.2. : Pour qu'une congruence R sur M soit simplifiante il faut et il suffit que M/R soit un A - semi-module.

Supposons R simplifiante. On va prouver que l'addition de M/R

est simplifiante. On a : $[\bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z}] \implies [(x + z) R (y + z)] \implies [x R y]$
d'après (S') $\implies [\bar{x} = \bar{y}]$.

Réciproquement, si l'addition de M/R est simplifiante, R elle-même est simplifiante on a : $[(x + z) R (y + z)] \implies [\bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z}] \implies [\bar{x} = \bar{y}] \implies [x R y]$.

2 - Opérations sur les congruences.

Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de congruences sur M et soit R leur intersection C. à d. la relation suivante: Pour tout $(x, y) \in M \times M$:

$$x R y \iff (\forall i \in I) [x R_i y]$$

R est une congruence sur M. Il est connu qu'elle est une relation d'équivalence sur M. On a en plus :

$$(i) - [x R y] \implies (\forall i \in I) [x R_i y] \implies (\forall i \in I) \text{ et } (\forall z \in M) [(x + z) R_i (y + z)] \\ \implies (\forall z \in M) [(x + z) R (y + z)] \text{ R vérifie donc } (c'_1),$$

$$(ii) - [x R y] \implies (\forall i \in I) [x R_i y] \implies (\forall i \in I), (\forall a \in A) [(ax) R_i (ay)] \implies \\ (\forall a \in A) [(ax) R (ay)] \text{ R vérifie aussi } (c_2).$$

D'autre part, si toutes les (R_i) sont simplifiantes il en est de même pour R. En effet, on a :

$$(x + z) R (y + z) \implies (\forall i \in I) [(x + z) R_i (y + z)] \implies (\forall i \in I) [x R_i y] \\ \implies [x R y] \text{ R vérifie ainsi (S').}$$

Soient R une congruence sur M et F la famille de toutes les congruences simplifiants T sur M telles que R soit contenue dans T. F est non vide car la congruence amorphe sur M, et qui sera notée M, y est, soit R_s l'intersection des T quand T parcourt F. R_s est une congruence simplifiante contenant R et c'est la plus petite congruence simplifiante sur M qui a cette propriété. Elle sera appelée la clôture simplifiante de R sur M.

Proposition 1.2.1. R_s est la relation T suivante sur M :

$$(\forall (x, y) \in M \times M) [x T y \iff (\exists (x', y') \in M \times M) \\ \text{et } (\exists z \in M) ; [x' R y' \text{ et } x + x' + z = y + y' + z]]$$

Montrons, d'abord que T est une congruence simplifiante sur M :

(i) - T est une relation d'équivalence sur M :

a) elle est visiblement reflexique et symetrique.

b) Elle est transitive, car si on a à la fois : $x T y$ et $y T z$, il existe (x', y') et (y'', z') dans $M \times M$ et $(t, t') \in M \times M$ tel que l'on a : $x' R y'$, $y'' R z'$, $x + x' + t = y + y' + t$, $y + y'' + t' = z + z' + t'$ d'où : $(x' + y'') R (y' + z')$ et $x + (x' + y'') + (y + t + t') = z + (y' + z') + (y + t + t')$ ce qui prouve : $x T z$.

(ii) T vérifie (c'_1) et (c_2) :

si on a $x T y$ il existe $(x', y') \in M \times M$ et $t \in M$ tel que l'on a $x' R y'$ et $x + x' + t = y + y' + t$. D'où :

$$\begin{aligned} - \text{Pour tout } z \in M, \text{ on a : } & x' R y' \text{ et } (x + z) + x' + t = (y + z) + \\ & + y' + t \end{aligned}$$

ce qui prouve $(x + z) T (y + z)$ pour tout $z \in M$.

- De même, pour tout $a \in A$ on a : $(ax') T (ay')$ et

$$ax + ax' + at = ay + ay' + at \quad \text{ce qui prouve : } (ax) T (ay)$$

pour tout $a \in A$.

(iii) - T vérifie (S') :

$$\begin{aligned} [(x + z) T (y + z)] & \implies (\exists (x', y') \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) : [x' R y' \\ & \text{et } (x + z) + x' + t = (y + z) + y' + t] \implies (\exists (x', y') \in M \times M) \\ & \text{et } (\exists t' \in M) : [x R y' \text{ et } x + x' + t' = y + y' + t'] \text{ avec } t' = t + z \implies [x T y]. \end{aligned}$$

Ceci étant, montrons que T est la plus petite congruence simplifiante sur M contenant R : On a :

- $R \subseteq T$. En effet, $[x R y] \implies [x + y + z = y + x + z \text{ pour tout } z \in M \text{ avec : } y R x] \implies [x T y]$,

- Si S est une congruence simplifiante sur M telle que R soit contenue dans S, T est alors contenue dans S : car si on a $x T y$, il existe $(x', y') \in M \times M$ et $t \in M$ tel que l'on a : $x' R y'$ et $x + x' + t = y + y' + t$.

On a donc : $x' S y'$ car on a : $R \subseteq S$ et $(x + x' + t) S (y + y' + t)$

S étant simplifiante, il en résulte : $x S y$.

On en déduit : $T = R_S$.

Soit, maintenant, E une partie de $M \times M$. Désignons par F la famille des congruences (resp. des congruences simplifiantes) R sur M telles que l'on a : $x R y$ pour tout $(x, y) \in E$. F est non vide, car la congruence amorphe M sur M est. L'intersection des $R \in F$ est une congruence (congruence simplifiante) dans F et c'en est la plus petite. Elle sera appelée congruence engendrée par E sur M (resp. Congruence simplifiante engendrée par E sur M).

Il est immédiat que la seconde n'est autre chose que la clôture simplifiante de la première.

Proposition 1.2.2. : La congruence simplifiante engendrée par E sur M est la relation R suivante :

$$x R y \iff (\exists (x_i, y_i)_{i \in I} \in E), (\exists (a_i, b_i)_{i \in I} \in A \times A) \text{ et } (\exists t \in M) ;$$

- I soit un ensemble fini d'entiers positif.

$$- x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = y + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t$$

Montrons d'abord que R est une congruence simplifiante sur M :

(i) - R est une relation d'équivalence sur M :

a) La réflexivité et la symétrie sont évidentes.

b) R est transitive : si on a : $x R y$ et $y R z$, il existe

$$(x_i, y_i)_{i \in I} \text{ et } (x'_j, y'_j)_{j \in J} \text{ dans } E, (a_i, b_i)_{i \in I} \text{ et } (a'_j, b'_j)_{j \in J}$$

dans $A \times A$ et $(t, t') \in M$ tels que I et J soient finis et que l'on a :

$$x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = y + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t$$

et

$$y + \sum_{j \in J} a'_j x'_j + \sum_{j \in J} b'_j y'_j + t' = z + \sum_{j \in J} a'_j y'_j + \sum_{j \in J} b'_j x'_j + t'$$

d'où :

$$x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{j \in J} a'_j x'_j + \sum_{i \in I} b_i y_i + \sum_{j \in J} b'_j x'_j + (y + t + t') =$$

$$= z + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{j \in J} a'_j y'_j + \sum_{i \in I} b_i x_i + \sum_{j \in J} b'_j x'_j + (y + t + t')$$

ce qui prouve $x R z$.

(ii) - R vérifie les axiomes (c'_1) et (c_2) :

$[x R y] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i \in I} \in E), (\exists (a_i, b_i)_{i \in I} \in A \times A) \text{ et } (\exists t \in M) \text{ tels que}$
l'on a : I est un ensemble fini et :

$$x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = y + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t. \text{ D'où :}$$

pour tout $z \in M$ on a

$$(x+z) + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = (y+z) + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t$$

ce qui prouve $(x+z) R (y+z)$ pour tout $z \in M$. Pour tout $a \in A$ on a :

$$a x + \sum_{i \in I} a a_i x_i + \sum_{i \in I} a b_i y_i + at = ay + \sum_{i \in I} a a_i y_i + \sum_{i \in I} a b_i x_i + at$$

ce qui prouve : $(ax) R (ay)$ pour tout $a \in A$.

(iii) - R vérifie l'axiome (S') :

$[(x+z) R (y+z)] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i \in I} \in E), (\exists (a_i, b_i)_{i \in I} \in A \times A) \text{ et } (\exists t \in M)$
tel que I soit fini et que l'on a :

$$(x+z) + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = (y+z) + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t$$

$$\text{D'où : } x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + (t+z) = y + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + (t+z)$$

ce qui prouve $x R y$.

Montrons, ensuite, que R est la plus petite congruence simplifiante sur M qui vérifie : $x R y$ pour tout $(x, y) \in E$.

Tout d'abord soit (x, y) un élément de E et c un élément de Z(A). Il existe $d \in A$ tel que $c + d = d$. D'où :

$$\begin{aligned} x + c x + 1 y + (dx + dy) &= x + (c + d)x + 1 y + dy = x + dx + 1 y + dy \\ &= y + 1 x + dx + dy = y + (c + d) y + 1 x + dx \\ &= y + cy + 1 x + (dx + dy). \end{aligned}$$

D'autre part, si T est une congruence simplifiante sur M qui vérifie : $x T y$ pour tout $(x,y) \in E$ on a : $R \subseteq T$.

$$[x R y] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i \in I} \in E), \quad (\exists (a_i, b_i)_{i \in I} \in A \times A) \text{ et } (\exists t \in M)$$

tel que I soit fini et que l'on a :

$$x + \sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t = y + \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t.$$

Or on a : $x_i T y_i$ pour tout $i \in I$ puisque (x_i, y_i) est dans E pour tout $i \in I$. Il en résulte ;

$$\left(\sum_{i \in I} a_i x_i + \sum_{i \in I} b_i y_i + t \right) T \left(\sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} b_i x_i + t \right)$$

et par suite, vu la simplifiabilité de T , $x T y$.

En particulier si $E = \left\{ (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \right\}$ la congruence simplifiante engendrée par E sur M sera notée : $R_{x_1 y_1 \dots x_n y_n}$

Définition 1.2.1. : On dira qu'une congruence simplifiante sur M est de type fini si, et seulement si elle est engendrée par un nombre fini de couples dans $M \times M$. Elle sera dite principale si, et seulement si elle est engendrée par un seul couple.

Les (x_i, y_i) seront dits les générateurs de la congruence.

Considérons, maintenant, une famille $(R_i)_{i \in I}$ de congruences sur M . Désignons par E l'ensemble des $(x,y) \in M \times M$ tel qu'il existe un $i \in I$ pour lequel on a : $x R_i y$. On appelle congruence sur M composée des $(R_i)_{i \in I}$ la congruence engendrée par E . On aura surtout à nous intéresser de sa clôture simplifiante que nous noterons $\bigcup_{i \in I} R_i$.

Proposition 1.2.3. : $\bigcup_{i \in I} R_i$ n'est autre chose que la relation R suivante :

$x R y \iff$ il existe une partie finie J de I , une suite $(x_i, y_i)_{i \in J}$ dans $M \times M$ et $t \in M$ tels que l'on a : $x_i R_i y_i$ pour tout $i \in J$ et :

$$x + \sum_{i \in J} x_i + t = y + \sum_{i \in J} y_i + t.$$

$$(i) - \bigcup_{i \in I} R_i \subseteq R$$

$$\left[x \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) y \right] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i \in J} \in E), (\exists (a_i, b_i)_{i \in J} \in A \times A \text{ et } (\exists t \in M)$$

tel que J soit un ensemble fini et que l'on a

$$x + \sum_{i \in J} a_i x_i + \sum_{i \in J} b_i y_i + t = y + \sum_{i \in J} a_i y_i + \sum_{i \in J} b_i x_i + t$$

(x_i, y_i) étant dans E, il existe un $j(i) \in I$, pour tout $i \in J$ tel que l'on a :

$$x_i R_{j(i)} y_i. \text{ Soit } J' = \{ j(i) / i \in J \}. \text{ De l'autre côté } \left[x_i R_{j(i)} y_i \right] \Rightarrow$$

$$(a_i x_i + b_i y_i) R_{j(i)} (a_i y_i + b_i x_i). \text{ Posons, pour tout } i \in J, u_{j(i)} =$$

$$= a_i x_i + b_i y_i \text{ et } v_{j(i)} = a_i y_i + b_i x_i. \text{ On a ; } u_{j(i)} R_{j(i)} v_{j(i)}$$

$$\text{pour tout } j(i) \in J' \text{ et } x + \sum_{j(i) \in J'} u_{j(i)} + t = y + \sum_{j(i) \in J'} v_{j(i)} + t \text{ ce qui}$$

prouve : $x R y$.

$$(ii) - [x R y] \Rightarrow (\exists J \subseteq I \text{ finie}), (\exists (x_i, y_i)_{i \in J} \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M)$$

tel que l'on a : $x_i R_i y_i$ pour tout $i \in J$ et :

$$x + \sum_{i \in J} x_i + t = y + \sum_{i \in J} y_i + t.$$

soit c un élément de $Z(A)$. Il existe $d \in A$ tel que : $c + d = d$. On a :

$$\begin{aligned} x + \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J} c y_i + \left(\sum_{i \in J} (d x_i + d y_i) + t \right) \\ = x + \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J} (c + d) y_i + \left(\sum_{i \in J} d x_i + t \right) \\ = x + \sum_{i \in J} x_i + t + \sum_{i \in J} d x_i + \sum_{i \in J} d y_i \\ = y + \sum_{i \in J} y_i + t + \sum_{i \in J} d x_i + \sum_{i \in J} d y_i = y + \sum_{i \in J} y_i + \sum_{i \in J} (c + d) x_i + \\ + \sum_{i \in J} d y_i + t \\ = y + \sum_{i \in J} y_i + \sum_{i \in J} c x_i + \left(\sum_{i \in J} (d x_i + d y_i) + t \right) \text{ ce qui prouve :} \end{aligned}$$

$$x \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) y$$

On a, ainsi défini deux lois de composition internes sur l'ensemble des congruences définies sur M . Ces deux lois sont associatives et commutatives.

De plus :

Proposition 1.2.4. :

Soient P, R et T trois congruences sur M telles que P soit simplifiante et que R soit contenue dans P. On a alors :

$$P \cap (R \cup T) = R \cup (P \cap T).$$

(i) $R \cup (R \cap T) \subseteq P \cap (R \cup T)$. On a :

$$\begin{aligned} [R \subseteq P \text{ et } R \subseteq R \cup T] &\Rightarrow [R \subseteq P \cap (R \cup T)], \text{ De même} \\ [P \cap T \subseteq P \text{ et } P \cap T \subseteq T \subseteq R \cup T] &\Rightarrow [P \cap T \subseteq P \cap (R \cup T)] \\ \text{d'où } [R \cup (P \cap T) &\subseteq P \cap (R \cup T)] \end{aligned}$$

(ii) - $P \cap (R \cup T) \subseteq R \cup (R \cap T)$: on a :

$$\begin{aligned} [x [P \cap (R \cup T)] y] &\Rightarrow [x P y \text{ et } x (R \cup T) y] \Rightarrow [x P y \text{ et il} \\ \text{existe } (x', y'), (x'', y'') \in M \times M \text{ et } t \in M \text{ tel que l'on a :} \\ [x' R y', x'' T y'' \text{ et } x + x' + x'' + t = y + y' + y'' + t] &\Rightarrow [x P y \text{ et il existe} \\ (x', y'), (x'', y'') \in M \times M \text{ et } t \in M \text{ tel que l'on a : } [x' P y' \text{ (car on a } R \subseteq P), \\ x'' T y'' \text{ et } x + x' + x'' + t = y + y' + y'' + t] &\Rightarrow [\text{il existe } (x', y') , \\ (x'', y'') \in M \times M \text{ et } t \in M \text{ tel que l'on a : } [(x + x') P (y + y'), x'' T y'' \text{ et} \\ x + x' + x'' + t = y + y' + y'' + t] &\Rightarrow [\text{il existe } (x', y') \in M \times M, (x'', y'') \\ \in M \times M \text{ et } t \in M \text{ tel que l'on a : } [x' R y', x'' (P \cap T) y'' \text{ (vue la simpli-} \\ \text{fiabilité de P) et } x + x' + x'' + t = y + y' + y'' + t] &\Rightarrow [x [R \cup (P \cap T)] y]. \end{aligned}$$

3 - Cas des demi anneaux :

Nous savons que le demi-anneau A peut être considéré comme un A - demi-module à gauche (resp. à droite). Les congruences du A -demi-module à gauche (resp. à droite) A seront appelées congruences à gauche (resp. à droite) sur A. On dira qu'une congruence sur A est bilatère si elle est à la fois congruence à droite et congruence à gauche.

4 - Opérations externes sur les congruences :

Soient R une congruence à gauche sur A et S une congruence sur M. Considérons la relation T suivante :

$x T y \Leftrightarrow$ il existe $(x_i, y_i)_{i=1,2,\dots,n} \in M \times M$, $(a_i, b_i)_{i=1,2,\dots,n} \in A \times A$ et $t \in M$

tels que l'on a : $a_i R b_i$, $x_i S y_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et

$$x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t = y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t.$$

Une démonstration analogue à la première partie de celle faite dans la proposition (1,2,2,) prouve que T est une congruence simplifiante sur M .

Soit, maintenant, $E = \{ (ax + by, ay + bx) \in M \times M / a R b, x S y \}$.

On appelle produit de S par R et on note $R S$ la congruence simplifiante engendrée par E sur M .

Proposition 1.4.1. : T est identique à $R S$.

Pour cela il suffit de prouver que T est la plus petite congruence simplifiante sur M qui vérifie :

$[a R b \text{ et } x S y] \Rightarrow [(ax + by) T (ay + bx)]$. On a d'abord :

$$[a R b \text{ et } x S y] \Rightarrow [(ax + by) + ay + bx + t = (ay + bx) + ax + by + t]$$

pour tout $t \in M \Rightarrow [(ax + by) T (ay + bx)]$,

Soit, ensuite, P une congruence simplifiante sur M vérifiant : $[a R b, x S y] \Rightarrow$

$[(ax + by) P (ay + bx)]$ on a alors : $T \subseteq P$. En effet :

$$[x T y] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i=1,2,\dots,n} \in M \times M), (\exists (a_i, b_i)_{i=1,2,\dots,n} \in A \times A \text{ et}$$

$(\exists t \in M)$ tels que l'on a : $[a_i R b_i, x_i S y_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n]$ et

$$x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t = y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t$$

Or, on a, pour $i = 1, 2, \dots, n$, $[a_i R b_i \text{ et } x_i S y_i]$ donc aussi

$[(a_i x_i + b_i y_i) P (a_i y_i + b_i x_i)]$ et par suite :

$$[(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t) P (\sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t)], \text{ Il en}$$

résulte : $x P y$, vue la simplifiabilité de P .

Proposition 1.4.2. : L'opération ainsi définie vérifie :

(i) - $R S \subseteq S$ si S est simplifiante

(ii) - $S \subseteq T \Rightarrow R S \subseteq R T$.

(ii) est évidente. Quant à (i) on a :

$[x (RS) y] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i=1}^n \in M \times M, (\exists (a_i, b_i)_{i=1}^n \in A \times A \text{ et } (\exists t \in M)$
tels que l'on a :

- $a_i R b_i$ et $x_i S y_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$

- $x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t = y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t$

Or on a :

$[x_i S y_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n] \Rightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t \right) S \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t \right) \right] \Rightarrow x S y$ puisque S est simplifiante.

Proposition 1.4.3. : $R. (S \cup T) = (RS) \cup (RT)$.

(i) - $(RS) \cup (RT) \subseteq R. (S \cup T)$. on a :

et $\left\{ \begin{array}{l} [S \subseteq S \cup T] \Rightarrow [RS \subseteq R. (S \cup T)] \\ [T \subseteq S \cup T] \Rightarrow [RT \subseteq R. (S \cup T)] \end{array} \right\} \Rightarrow (RS) \cup (RT) \subseteq R. (S \cup T)$

(ii) - $R. (S \cup T) \subseteq (RS) \cup (RT)$. on a :

$[x [R. (S \cup T)] y] \Rightarrow (\exists (x_i, y_i)_{i=1}^n \in M \times M),$

$(\exists (a_i, b_i)_{i=1}^n \in A \times A) \text{ et } (\exists t \in M) \text{ tels que l'on a :}$

- $a_i R b_i$ et $x_i (S \cup T) y_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

- et $x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t = y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t$

Mais, on a, d'autre part :

$[x_i (S \cup T) y_i] \Rightarrow (\exists (u_i, u'_i), (v_i, v'_i)_{i=1}^n \in M \times M) \text{ et } (\exists z_i \in M)$
tels que l'on a : - $u_i S u'_i$ $v_i T v'_i$ et :

$$x_i + u_i + v_i + z_i = y_i + u'_i + v'_i + z_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^n a_i z_i = \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n a_i u'_i + \sum_{i=1}^n a_i v'_i + \sum_{i=1}^n a_i z_i$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v'_i + \sum_{i=1}^n b_i z_i = \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i z_i$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités et en ajoutant $x + y + t$

aux deux membres de l'égalité obtenue on aura :

$$\begin{aligned} x + (y + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i + t) + \sum_{i=1}^n a_i u'_i + \sum_{i=1}^n b_i u_i + (\sum_{i=1}^n a_i v'_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i) \\ + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) z_i = y + (x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t) + (\sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i u'_i) \\ + (\sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v'_i) + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) z_i \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } u = \sum_{i=1}^n a_i u'_i + \sum_{i=1}^n b_i u_i, \quad u' = \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i u'_i$$

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v'_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i, \quad v' = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^n b_i v'_i$$

$$z = x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) z_i$$

$$= y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) z_i$$

$$\text{on obtient : } x + u + v + z = y + u' + v' + z \quad \text{avec } u(RS) u'$$

$$\text{puisque l'on a : } u + \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i u'_i + s = u' + \sum_{i=1}^n a_i u'_i + \sum_{i=1}^n b_i u_i + s$$

pour tout $s \in M$ avec : $a_i R b_i$ et $u_i S u'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. De même on a : $v(RT) v'$.

On en déduit $x [(RS) \sqcup (RT)] y$.

Proposition 1.4.4.: Soient R' et R'' deux congruences à gauche sur A et S une congruence sur M . On a :

$$(R', R'') \cdot S = R' \cdot (R'' S).$$

(i) -

$$[x [R'R''] \cdot S] y] \Rightarrow \{ (\exists (x_i, y_i)_{i=1,2,\dots,n} \in M \times M, (\exists (a_i, b_i)_{i=1,2,\dots,n} \in A \times A \text{ et } (\exists t \in M)$$

tels que l'on a : - $a_i (R' \cdot R'') b_i$ et $x_i S y_i$ pour $i=1,2,\dots,n$.

$$\text{et } x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t = y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t$$

Mais, d'autre part, nous avons :

$$a_i (R'R'') b_i \Rightarrow (\exists (a'_{ij}, b'_{ij})_{j=1,\dots,n_i} \in A \times A, (\exists (a''_{ij}, b''_{ij})_{j=1,\dots,n_i} \in A \times A \text{ et}$$

$(\exists c_i \in A)$ tels que l'on a :

- $a'_{ij} R' b'_{ij}$ et $a''_{ij} R'' b''_{ij}$ pour $j = 1, 2, \dots, n_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$

$$- a_i + \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} a''_{ij} + \sum_{j=1}^{n_i} b'_{ij} b''_{ij} + c_i = b_i + \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} b''_{ij} + \sum_{j=1}^{n_i} a''_{ij} b'_{ij} + c_i \quad (1)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$

L'égalité (1) nous donne :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} a''_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} b'_{ij} b''_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} b''_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a''_{ij} b'_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2)$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} b''_{ij} y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a''_{ij} b'_{ij} y_i + \sum_{i=1}^n c_i y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} a''_{ij} y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} b'_{ij} b''_{ij} y_i + \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad (3)$$

Additionnons, membre à membre les égalités (2) et (3). On obtient :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} (a''_{ij} x_i + b''_{ij} y_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} b'_{ij} (b''_{ij} x_i + a''_{ij} y_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} a'_{ij} (a''_{ij} y_i + b''_{ij} x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} b'_{ij} (a''_{ij} x_i + b''_{ij} y_i) + \sum_{i=1}^n c_i (x_i + y_i)$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité: $x + y + t$ et posons

$$\begin{aligned} z &= x + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i y_i + t + \sum_{i=1}^n c_i (x_i + y_i) \\ &= y + \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + t + \sum_{i=1}^n c_i (x_i + y_i). \end{aligned}$$

$$x''_{ij} = a''_{ij} x_i + b''_{ij} y_i \text{ et } y''_{ij} = a''_{ij} y_i + b''_{ij} x_i \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n_i$$

et $i = 1, 2, \dots, n$. On aura alors :

$$y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i'} a'_{ij} x''_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i'} b'_{ij} y''_{ij} + z = x + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i'} a'_{ij} y''_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i'} b'_{ij} x''_{ij} + z$$

Pour obtenir : $x [R'(R''S)] y$ il suffit de prouver : $x''_{ij} (RS) y''_{ij}$ pour $j = 1, 2, \dots, n_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$ puisque nous avons déjà : $a''_{ij} R' b'_{ij}$ pour $j = 1, 2, \dots, n_i$

et $j = 1, 2, \dots, n$.

Or nous avons pour $j = 1, 2, \dots, n_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x''_{ij} + a''_{ij} y_i + b''_{ij} x_i + u = y''_{ij} + a''_{ij} x_i + b''_{ij} y_i + u \text{ pour tout } u \in M \text{ avec}$$

$$a''_{ij} R'' b''_{ij} \text{ et } x_i S y_i.$$

Il en résulte : $(R'R'') \cdot S \subseteq R' \cdot (R''S)$.

L'autre inclusion se démontre de la même manière. On a donc :

$$(R'R'') S = R' (R''S).$$

5 - Congruence sur le demi anneau des entiers naturels.

Soit n un entier positif. On considère la relation R_n suivante sur le demi anneau $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \quad [a R_n b \Leftrightarrow (\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; a + p \cdot n = b + q \cdot n)] \cdot R_n$$

est une congruence simplifiante sur $\mathbb{N}$. En effet ;

(i) - R_n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$:

a) - La réflexivité et la symétrie de R_n sont évidentes.

b) - R_n est transitive :

$$\begin{aligned} [a R_n b \text{ et } b R_n c] &\Rightarrow (\exists (p, q), (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}); [a + pn = b + qn \\ \text{et } b + rn = c + sn] &\Rightarrow [a + (p + r)n = b + (q + s)n] \Rightarrow \\ &[a + (p + r)n = c + (q + s)n] \Rightarrow [a R_n c]. \end{aligned}$$

(ii) - R_n vérifie les axiomes (c'_1) et (c_2) :

si on a $a R_n b$ il existe alors p et q dans $\mathbb{N}$ tel que $a + p.n = b + q.n$.

D'où :

$$\begin{aligned} - \text{Pour tout } c \in \mathbb{N}, [(a + c) + p.n = (b + c) + q.n] &\Rightarrow \text{pour tout } c \in \mathbb{N} \text{ on a :} \\ [(a + c) R_n (b + c)] & \\ - \text{Pour tout } c \in \mathbb{N}, [ca + c.p.n = cb + c.q.n] &\Rightarrow \text{pour tout } c \in \mathbb{N} [(ca) R_n (cb)], \end{aligned}$$

(iii) - R_n vérifie l'axiome (s') :

$$\begin{aligned} (a + c) R_n (b + c) \quad (\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) ; [(a + c) + pn = (b + c) + qn] \\ \Rightarrow [a + pn = b + qn] \Rightarrow [a R_n b]. \end{aligned}$$

Proposition 1. 51. : Toute congruence simplifiante sur $\mathbb{N}$ est de la forme R_n .

Soit R une congruence simplifiante sur $\mathbb{N}$. Désignons par I la classe d'équivalence de 0 modulo R .

Lemme : I est un idéal de $\mathbb{N}$ de la forme $n \cdot \mathbb{N}$.

Il est immédiat que I est un idéal. Soit n le plus petit élément non nul de I . On va prouver que tout $a \in I$ est de la forme $p.n$. On peut écrire $a = p.n + r$ avec $0 \leq r < n$ on a :

$$\begin{aligned} [a \in I] &\Rightarrow [a R 0] \Rightarrow [(pn + r) R 0] \Rightarrow [(pn + r) R pn] \text{ car on a } [pn R 0] \Rightarrow \\ [r R 0] &\Rightarrow [r \in I] \Rightarrow [r = 0] \text{ vu le choix de } n \text{ dans } I. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant l'identité de R et R_n :

$$\begin{aligned} - [a R b] &\Rightarrow [(a - b) R 0] \text{ si } a \geq b \text{ par simplifications successives } \Rightarrow \\ [a - b = pn] &\Rightarrow [a + on = b + pn] \Rightarrow [a R_n b]. \text{ si on a } b \geq a \text{ on aura le même résultat} \\ - [a R_n b] &\Rightarrow (\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}); [a + pn = b + qn] \Rightarrow [a + (p - q)n = b] \\ &\text{si } p \geq q \Rightarrow [a R b] \text{ car on a } [(p - q)n] R 0 \text{ et puisque } R \text{ est simplifiante, si } p < q \end{aligned}$$

on aura le même résultat.

§ 2 Homomorphismes et congruences :

Soient A un demi-anneau unitaire, M et M' deux A- demi-modules unitaires à gauche et $f; M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans M'.

1 - Définitions :

Considérons l'ensemble E' formé des couples $(f(x), f(y)) \in M' \times M'$ où (x,y) parcourt la partie de $M \times M$ assimilée à R, où R est une congruence sur M. De l'autre côté considérons sur M', la relation R' définie par :

$$(\forall (x', y') \in M' \times M') [x' R' y' \iff (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R y \text{ et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t']]$$

R' est une congruence simplifiante sur M'. En effet :

(i) - R' est une relation d'équivalence sur M' :

a) Elle est visiblement réflexive et symétrique.

b) Elle est transitive, car si on a $x' R' y'$ et $y' R' z'$ il existerait alors, (x,y) et (u,z) dans $M \times M$, et (u', v') dans $M' \times M'$ tels que l'on a : $x R y$, $u R z$
 $x' + f(x) + u' = y' + f(y) + u'$ et $y' + f(y) + u' = z' + f(z) + v'$

D'où : $(x + u) R (y + z)$ et $x' + f(x + u) + (y' + u' + v') = z' + f(y + z) + (y' + u' + v')$
 ce qui prouve : $x' R' z'$.

(ii) - R' vérifie les axiomes (c_1') et (c_2) :

$$[x' R' y'] \implies (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R y \text{ et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t']$$

D'où :

$$- (\forall z' \in M') (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R y \text{ et } (x' + z') + f(x) + t' = (y' + z') + f(y) + t']$$

$$\implies (\forall z' \in M') [(x' + z') R' (y' + z')].$$

$$- (\forall a \in A) (\exists (ax, ay) \in M \times M) \text{ et } (\exists at' \in M') ; [(ax) R (ay) \text{ et } a x' + f(ax) + at' = ay' + f(ay) + at']$$

$$\implies (\forall a \in A) [(ax') R' (ay')]$$

(iii) - R' vérifie l'axiome (S') :

$$\begin{aligned} [(x' + z') R' (y' + z')] &\Rightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R y \text{ et } \\ &x' + z' + f(x) + t' = y' + z' + f(y) + z'] \Rightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } \\ &(\exists (z' + t') \in M') ; [x R y \text{ et } x' + f(x) + (z' + t') = y' + f(y) + (z' + t')] \\ &\Rightarrow [x' R' y'] . \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. : R' est la congruence simplifiante engendrée sur M' par E' .

Tout d'abord on a : $[x R y] \Rightarrow [f(x) R' f(y)]$ car on peut écrire :

$$f(x) + f(y) + t' = f(y) + f(x) + t' \text{ pour tout } t' \in M'.$$

Ensuite, soit T' une congruence simplifiante sur M' qui vérifie : $[x R y] \Rightarrow$

$[f(x) T' f(y)]$. Je dis que R' est contenue dans T' . En effet :

$$[x' R' y'] \Rightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R y \text{ et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t']$$

Mais on a : $f(x) T' f(y)$ donc aussi $(f(x) + t') T' (f(y) + t')$

Il en résulte, puisque T' est simplifiable, $x' T' y'$:

La congruence R' sera notée $f(R)$ et appelée image de R par f .

Exemples :

1 - Si M est un sous-module de M' et f est l'injection canonique de M dans M' , toute congruence R sur M se prolonge en une congruence simplifiante $\bar{R}$ sur M' , $\bar{R}$ n'est autre que $f(R)$

2 - Si M' est le quotient de M par une congruence S et f est la surjection canonique de M sur M' , l'image de toute congruence R sur M sera notée R/S ,

Proposition 2.1.2. : Soit R' une congruence sur M' . On définit sur M la relation R suivante :

$$(\forall (x, y) \in M \times M) \quad [x R y \iff f(x) R' f(y)] . \text{ On a :}$$

(i) - R est une congruence sur M

(ii) - R' simplifiante $\Rightarrow R$ simplifiante

$$(iii) - R_f \subseteq R$$

(i) - R est une congruence sur M .

Il est immédiat de vérifier ça :

(ii) - R' simplifiante $\Rightarrow R$ simplifiante :

$$[(x+z) R (y+z)] \Rightarrow [f(x) + f(z)] R' [f(y) + f(z)] \Rightarrow [f(x) R' f(y)]$$

puisque R' est simplifiante $\Rightarrow [x R y]$

(iii) - $R_f \subseteq R$:

$$[x R_f y] \Rightarrow [f(x) = f(y)] \Rightarrow [f(x) R' f(y)] \Rightarrow [x R y],$$

Cette congruence R sera notée $f^{-1}(R')$ et appelée l'image réciproque de R' par f .

Proposition 2.1.3. : Si f est surjectif, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des congruences simplifiantes sur M' et celui des congruences simplifiantes sur M contenant R_f .

On commence par établir deux lemmes.

Lemme 1 : $f(R_f) = Z_{M'}$.

(i) - $f(R_f) \subseteq Z_{M'}$

$$[x' f(R_f) y'] \Rightarrow (\exists (x,y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x R_f y \text{ et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t'] \Rightarrow$$

$$(\exists (x,y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [f(x) = f(y) \text{ et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t'] \Rightarrow [x' Z_{M'} y'].$$

(ii) - $Z_{M'} \subseteq f(R_f)$ car $Z_{M'}$ est la plus petite congruence simplifiante sur M'

Lemme 2 : $f^{-1}(f(R)) = R \cup R_f$

(i) - $R \cup R_f \subseteq f^{-1}(f(R))$:

$$[x (R \cup R_f) y] \Rightarrow (\exists (x', y'), (x'', y'') \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ;$$

$$[x' R y', x'' R_f y'' \text{ et } x + x' + x'' + t = y + y' + y'' + t] \Rightarrow$$

$$(\exists (x', y'), (x'', y'') \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [x' R y', f(x'') = f(y'')]$$

$$\text{et } f(x) + f(x') + (f(x'') + f(t)) = f(y) + f(y') + (f(y'') + f(t))]$$

$$\Rightarrow [f(x) f(R) f(y)] \Rightarrow [x f^{-1}(f(R)) y],$$

(ii) - $f^{-1}(f(R)) \subseteq R \cup R_f$:

$$\begin{aligned}
 [x f^{-1}(f(R)) y] &\Rightarrow [f(x) f(R) f(y)] \Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et} \\
 &\Rightarrow (\exists t' \in f^{-1}(f(t)) \in M') ; [u R v \text{ et } f(x) + f(u) + f(t) = f(y) + f(v) + f(t)] \\
 &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u R v \text{ et } (x + u + t) R_f (y + v + t)] \\
 &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u R v, (x + u + t) R_f (y + v + t) \\
 &\text{ et } x + u + (y + v + t) + t = y + (x + u + t) + t] \\
 &\Rightarrow [x (R \cup R_f) y] ,
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'application φ qui à chaque congruence simplifiante R' sur M' fait correspondre son image réciproque par f qui est une congruence simplifiante sur M contenant R_f . Montrons que φ est un bijection.

- φ est une surjection :

Soit R une congruence simplifiante sur M contenant R_f on a :

$$\varphi(f(R)) = f^{-1}(f(R)) = R \cup R_f = R \text{ car } : R_f \subseteq R.$$

- φ est une injection :

Si on a : $f^{-1}(R') = f^{-1}(T')$ on peut écrire en tenant compte de la surjectivité de f :

$$f(x) R' f(y) \iff x f^{-1}(R') y \iff x f^{-1}(T') y \iff f(x) T' f(y).$$

2 - Quelques relations :

On suppose que f soit surjectif dans ce numéro. Soient S et T deux congruences sur M .

Proposition 2.2.1. : (i) - $S \subseteq T \implies f(S) \subseteq f(T)$
(ii) - $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
(iii) - $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$ et on a l'égalité si S ou T contient R_f et est simplifiante.

(i) - est évident.

(ii) - $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$

$$\begin{aligned}
 - [S \subseteq S \cup T] &\implies [f(S) \subseteq f(S \cup T)] \\
 - [T \subseteq S \cup T] &\implies [f(T) \subseteq f(S \cup T)]
 \end{aligned}
 \implies [f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)]$$

$$- f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T) :$$

$$[x' f(S \cup T) y'] \Rightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) \text{ et } (\exists t' \in M') ; [x (S \cup T) y \\ \text{et } x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t'] .$$

Mais on a, d'autre part :

$$[x (S \cup T) y] \Rightarrow [(\exists (u, v), (s, t) \in M \times M) \text{ et } (\exists z \in M) ; [u S v, \\ s T t \text{ et } x + u + z = z + v + t + z] .$$

$$D'où : [f(x) + f(u) + f(z) = f(y) + f(v) + f(t) + f(z)] ,$$

il en résulte : $f(x) [f(s) \cup f(T)] f(y)$ puisque nous avons :

$$f(u) f(s) f(v) \text{ et } f(s) f(T) f(t) . \text{ En remarquant } [x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t']$$

on déduit : $x' [f(s) \cup f(T)] y' .$

$$(iii) - \left[\begin{array}{l} [S \cap T \subseteq S] \Rightarrow [f(S \cap T) \subseteq f(S)] \\ [S \cap T \subseteq T] \Rightarrow [f(S \cap T) \subseteq f(T)] \end{array} \right\} \Rightarrow f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$$

Supposons, en plus, que S contient R_f et qu'elle est simplifiante. On a :

$$[x' (f(S) \cap f(T)) y'] \Rightarrow [x' f(S) y' \text{ et } x' f(T) y'] \Rightarrow (\exists (x, y), (u, v) \in M \times M) \\ \text{et } (\exists (t', z') \in M' \times M') ; [x S y, u T v, x' + f(x) + t' = y' + f(y) + t' \\ \text{et } x' + f(u) + z' = y' + f(v) + z'] \Rightarrow (\exists (x, y), (u, v) \in M \times M) \text{ et } \\ (\exists (t', z') \in M' \times M') ; [x S y, u T v \text{ et } x' + y' + f(x) + f(v) + t' + z' = \\ = x' + y' + f(y) + f(u) + t' + z'] .$$

Or, il existe $z \in M$ tel que : $f(z) = x' + y' + t' + z'$ d'où :

$$f(x) + f(v) + f(z) = f(y) + f(u) + f(z) \quad \text{c.à.d.}$$

$$(x + v + z) R_f (y + u + z) \text{ et par suite } (x + v + z) S (y + u + z)$$

puisque on a : $R_f \subseteq S$. Mais nous avons $x S y$ et S est simplifiante, on en déduit

$u S v$ donc aussi $u(S \cap T) v$ et par suite : $x' f(S \cap T) y' .$

Proposition 2.2.2. : Soient S' et T' deux congruences sur M' . On a :

$$(i) - S' \subseteq T' \Rightarrow f^{-1}(S') \subseteq f^{-1}(T')$$

$$(ii) - f^{-1}(S' \cap T') = f^{-1}(S') \cap f^{-1}(T')$$

$$(iii) - f^{-1}(S' \cup T') \supseteq f^{-1}(S') \cup f^{-1}(T') \text{ et on a l'égalité si, en plus, } f \text{ est injectif.}$$

(i) est immédiat

$$(ii) \quad \left[x f^{-1}(S' \cap T') y \right] \Leftrightarrow \left[f(x) (S' \cap T') f(y) \right] \Leftrightarrow \left[f(x) S' f(y) \text{ et } f(x) T' f(y) \right] \\ \Leftrightarrow \left[x f^{-1}(S') y \text{ et } x f^{-1}(T') y \right] \Leftrightarrow \left[x (f^{-1}(S') \cap f^{-1}(T')) y \right]$$

(iii) - L'inclusion résulte de (i). Supposons, en plus, f injectif, f sera donc bijectif. On aura alors :

$$\left[x f^{-1}(S' \cup T') y \right] \Rightarrow \left[f(x) (S' \cup T') f(y) \right] \Rightarrow (\exists (f(u), f(v), (f(r), f(s)) \\ \in M' \times M') \text{ et } (\exists f(t) \in M') ; [f(u) S' f(v), f(r) T' f(s) \text{ et} \\ f(x) + f(u) + f(r) + f(t) = f(y) + f(v) + f(s) + f(t)] \Rightarrow \\ [(\exists (u, v), (r, s) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u f^{-1}(S') \cup f^{-1}(T') s \\ \text{et } x + u + r + t = y + v + s + t \text{ puisque } f \text{ est bijectif}] \Rightarrow \left[x (f^{-1}(S') \cup f^{-1}(T')) y \right],$$

3 - Théorèmes d'homomorphismes :

Soient R (resp. R') une congruence sur M (resp. M') et $f : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans M' . On désignera par $p : M \longrightarrow M/R$ (resp. $p' : M' \longrightarrow M'/R'$) la surjection canonique de M (resp. M') sur M/R (resp. M'/R').

Proposition 2.3.1. : Si on a : $f(R) \subseteq R'$, il existe, alors, un homomorphisme unique $\bar{f} : M/R \longrightarrow M'/R'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ M/R & \xrightarrow{\bar{f}} & M'/R' \end{array}$$

(i) - Définition de $\bar{f}$:

Pour tout $p(x) \in M/R$ on pose : $\bar{f}(p(x)) = p'(f(x))$ cette définition ne dépend pas du choix des représentants. En effet : $[p(x) = p(y)] \Rightarrow [xRy] \Rightarrow [f(x) f(R) f(y)] \Rightarrow [f(x) R' f(y)] \Rightarrow [p'(f(x)) = p'(f(y))]$

(ii) - $\bar{f}$ est un homomorphisme :

La vérification est immédiate

(iii) - $\bar{f}$ rend le diagramme commutatif :

Par définition, même de $\bar{f}$.

(iv) - $\bar{f}$ est unique sous ces conditions :

S'il existe un autre homomorphisme $g ; M/R \longrightarrow M'/R'$ qui vérifie :
 $g \circ p = p' \circ f$ on aura : Pour tout $p(x) \in M/R$:

$$g(p(x)) = g \circ p(x) = p' \circ f(x) = p'(f(x)) = \bar{f}(p(x)). \text{ Donc } g = \bar{f}$$

Proposition 2.3.2.

Si R est contenue dans R_f , il existe un homomorphisme unique $\bar{f} ; M/R \longrightarrow M'$
 tel que $\bar{f} \circ p = f$

La démonstration est analogue à la précédente.

Corollaire: M/R_f est isomorphe à $f(M)$.

D'après la proposition, il existe un homomorphisme $\bar{f} ; M/R_f \longrightarrow f(M)$
 tel que ; $\bar{f} \circ p = f$ si $p ; M \longrightarrow M/R_f$ désigne la surjection canonique.

- $\bar{f}$ est une surjection :

$$\bar{f}(M/R_f) = \bar{f}(p(M)) = \bar{f} \circ p(M) = f(M).$$

- $\bar{f}$ est une injection :

$$\begin{aligned} [p(x) R_f p(y)] &\Rightarrow [\bar{f} \circ p(x) = \bar{f} \circ p(y)] \Rightarrow [f(x) = f(y)] \Rightarrow [x R_f y] \\ &\Rightarrow [p(x) = p(y)], \end{aligned}$$

$\bar{f}$ est donc un isomorphisme entre $f(M)$ et M/R_f .

Proposition 2.3.3. : Si, en plus, S est une congruence simplifiante
 sur M telle que l'on a : $R \subseteq S$ on a alors :

$$M/R/S/R \text{ est isomorphe à } M/S$$

considérons l'application $f ; M \longrightarrow M$ identique à l'identité. Je dis que
 $f(R)$ est dans S . En effet :

$$\begin{aligned} [x f(R) y] &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M); [u R v \text{ et } x + f(u) + t = y + f(v) + t] \\ &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M); [u S v \text{ et } x + u + t = y + v + t] \Rightarrow [x S y] \end{aligned}$$

puisque S est simplifiante.

On peut donc appliquer la proposition (2.3.1.) du présent chapitre.

Il existe, donc, un homomorphisme unique $g ; M/R \longrightarrow M/S$ tel que, si on
 désigne par $p ; M \longrightarrow M/R$ resp. $q ; M \longrightarrow M/S$ la surjection canonique,

$g \circ p = q \circ 1_M = q$. Cherchons R_g . On a :

$$[p(x) R_g p(y)] \Leftrightarrow [g \circ p(x) = g \circ p(y)] \Leftrightarrow [q(x) = q(y)] \Leftrightarrow [x S y]$$

on a donc : $[p(x) R_g p(y)] \Rightarrow [x S y] \Rightarrow [p(x) p(S) p(y)] \Rightarrow [p(x) S/R p(y)]$.

$$\text{Réciproquement : } [p(x) S/R p(y)] \Rightarrow [p(x) p(S) p(y)] \Rightarrow$$

$$(\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u S v \text{ et } p(x) + p(u) + p(t) = p(y) + p(v) + p(t)]$$

$$\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u S v \text{ et } (x + u + t) R (y + v + t)]$$

$$\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) \text{ et } (\exists t \in M) ; [u S v \text{ et } (x + u + t) S (y + v + t)] \text{ puisque}$$

$$\text{l'on a : } R \subseteq S \Rightarrow [x S y] \Rightarrow [p(x) R_g p(y)].$$

On en déduit : $R_g = S/R$ d'où : $M/R/S/R$ est isomorphe à

$$g(M/R) = g(p(M)) = g \circ p(M) = q(M) = M/S.$$

§ 3 ORDRES.

Soient A un demi-anneau unitaire, M un A-demi-module unitaire à gauche, N une partie de M et T une congruence sur M.

On définit sur A la relation, notée O_N^T , suivante :

Pour tout $(a, b) \in A \times A$ $a O_N^T b \iff (\forall x \in N) [(ax) T (bx)]$

Je dis que O_N^T est une congruence à gauche sur A. En effet :

1 - O_N^T est une relation d'équivalence sur A :

a - $(\forall a \in A)$ et $(\forall x \in N) [(ax) T (ax)]$ d'où : $a O_N^T a$ pour tout $a \in A$

b - $\left[a O_N^T b \right] \Rightarrow (\forall x \in N) [(ax) T (bx)] \Rightarrow (\forall x \in N)$

$[(bx) T (ax)] \Rightarrow \left[b O_N^T a \right]$

c - $\left\{ \begin{array}{l} \left[a O_N^T b \right] \\ \text{et} \left[b O_N^T c \right] \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall x \in N) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (ax) T (bx) \\ (bx) T (cx) \end{array} \right\}$

$\Rightarrow (\forall x \in N) [(ax) T (cx)] \Rightarrow \left[a O_N^T c \right]$

2 - O_N^T vérifie les axiomes (c'_1) et (c_2) : En effet si on a :

$a O_N^T b$ on a : $(ax) T (bx)$ pour tout $x \in N$. D'où :

$(ax + cx) T (bx + cx)$ pour tout $c \in A$ et tout $x \in N$. On en déduit : $[(a + c)x] T$

$[(b + c)x]$ pour tout $x \in N$ c. à d. $(a + c) O_N^T (b + c)$

De même pour tout $c \in A$ on a : $(cax) T (cbx)$ pour tout $x \in N$.

On a donc $(ca) O_N^T (cb)$ pour tout $c \in A$.

Définition 3.1. : On appelle ordre de N par rapport à T la congruence à gauche sur A ainsi définie.

Dans le cas particulier où T est l'égalité, O_N^T sera notée O_N et appelée l'ordre de N. Dans le cas où N est réduit à un seul élément x de M, on notera O_x^T (resp. O_x) la congruence $O_{\{x\}}^T$ (resp. $O_{\{x\}}$) et on l'appellera Ordre de x par rapport à T (resp. Ordre de x).

Proposition 3.1. : Si T est simplifiante, O_N^T l'est aussi.

En effet :

$$\left[(a + c) O_N^T (b + c) \right] \Rightarrow (\forall x \in N) [(ax + cx) T (bx + cx)] \Rightarrow (\forall x \in N) [(ax) T (bx)]$$

puisque T est simplifiante $\Rightarrow [a O_N^T b]$,

Proposition 3.2. : Si N est fermé pour la loi externe, O_N^T est alors une congruence bilatère sur A.

Il suffit de prouver que O_N^T est congruence à droite. En effet : si on a : $a O_N^T b$ et si c est un élément quelconque de A on a : cx est dans N pour tout $x \in N$. D'où : $(a c x) T (b c x)$ pour tout $x \in N$. On en déduit que si on a $a O_N^T b$, on a aussi $(ac) O_N^T (bc)$ pour tout $c \in A$.

Proposition 3.3. : $O_M = \bigcap_{x \in M} O_x$

En effet :

$$\begin{aligned} [a O_M b] &\Leftrightarrow (\forall x \in M) [ax = bx] \\ &\Leftrightarrow a \left(\bigcap_{x \in M} O_x \right) b \end{aligned}$$

Proposition 3.4. : Pour tout x dans M, Ax est isomorphe à A/O_x

soit $f : A \longrightarrow Ax$ qui à $a \in A$ fait correspondre ax dans Ax . f est un homomorphisme surjectif. D'après le corollaire de la proposition (2.3.2.) du chapitre I, $Ax = f(A)$ est isomorphe à A/R_f . Cherchons donc R_f , on a :

$$[a R_f b] \Leftrightarrow [f(a) = f(b)] \Leftrightarrow [ax = bx] \Leftrightarrow [a O_x b],$$

Où donc $R_f = O_x$ et par suite Ax est isomorphe à A/O_x .

De l'autre côté soient P une partie de $M \times M$ et S une congruence sur M. On définit sur A la relation, notée O_p^S , suivante :

Pour tout $(a, b) \in A \times A$: $a O_p^S b \Leftrightarrow$ Pour tout $(x, y) \in P$, il existe $z \in M$ tels que l'on a : $(ax + by + z) S (ay + bx + z)$

Je dis que O_p^S est une congruence à gauche simplifiante sur A. En effet :

1 - O_p^S est une relation d'équivalence sur A :

a - La réflexivité et la symétrie de O_p^S sont évidentes

b - O_p^S est transitive. Si on a : $a O_p^S b$ et $b O_p^S c$

pour tout $(x,y) \in P$, il existe z et t dans M tels que l'on a :

$$(ax + by + z) S (ay + bx + z) \text{ et } (bx + cy + t) S (by + cx + t)$$

D'où :

$$(ax + cy + bx + by + t + z) S (ay + cx + bx + by + t + z)$$

Donc pour tout $(x,y) \in P$ il existe $u = (bx + by + t + z) \in M$

tel que l'on a : $(ax + cy + u) S (ay + cx + u)$ d'où : $a O_p^S c$.

2 - O_p^S vérifie les deux axiomes (c'_1) et (c_2) :

Si on a : $a O_p^S b$, pour tout $(x,y) \in P$ il existe $z \in M$

tel que l'on a : $(ax + by + z) S (ay + bx + z)$. D'où :

c étant quelconque dans A , pour tout $(x,y) \in P$ il existe $z \in M$ tel que l'on a :

$$((a + c) x + (b + c) y + z) S ((a + c) y + (b + c) x + z)$$

$$c. a. d., \quad (a + c) O_p^S (b + c)$$

- De même c étant quelconque dans A , pour tout $(x,y) \in P$ il existe $z' = cz \in M$ tel que l'on a :

$$(c a x + c b y + cz) S (c a y + c b x + c z) \quad c. a. d., (ca) O_p^S (cb).$$

3 - O_p^S vérifie (S') :

si on a $(a + c) O_p^S (b + c)$, il existe, pour tout $(x,y) \in P$, $z \in M$

tel que l'on a : $(ax + cx + by + cy + z) S (ay + cy + bx + cx + z)$. Il existe

donc, pour tout $(x,y) \in P$, un $z' = (cx + cy + z) \in M$ tel que l'on a : $(ax + by + z') S$

$(ay + bx + z')$.

Définition 3.2. : On appelle ordre de P par rapport à S la congruence à gauche simplifiante ainsi définie.

Si S est l'égalité, O_p^S sera noté O_p et appelée ordre de P.

On peut appliquer ceci aux congruences sur M . En effet une congruence R sur M peut être assimilée à une partie de $M \times M$ jouissant de certaines propriétés. On peut alors parler de l'ordre de R par rapport à une certaine congruence S sur M , ou de l'ordre, de R . On les notera successivement O_R^S et O_R .

Un autre cas particulier est le cas où P est réduit à un seul élément $(x,y) \in M \times M$ et S est l'égalité. On notera O_x^y l'ordre de (x,y) au lieu de $O_{(x,y)}$ et on l'appellera Ordre de (x,y) .

Proposition 3.5. : Si R est l'amorphe, O_R n'est autre chose que l'ordre de M par rapport à la congruence nulle Z_M sur M .

$$(i) - O_R \subseteq O_M^{Z_M}$$

$$\left[a \ O_R \ b \right] \Rightarrow (\forall (x,y) \in M \times M) (\exists z \in M) [(ax + by + z) = ay + bx + z]$$

Prenons y dans $Z(M)$, il existe alors $y' \in M$ tel que $y + y' = y'$.

$$D'où : ax + by + z + ay' + by' = ax + b(y + y') + z + ay' + by'$$

$$= ax + by' + z + ay'$$

$$= ay + bx + z + ay' + by' = a(y + y') + bx + z + by'$$

$$= bx + by' + z + ay'$$

Il existe donc $t = (z + ay' + by') \in M$ tel que $ax + t = bx + t$ c. à d.

$(ax) Z_M (bx)$ pour tout $x \in M$. On en déduit :

$$a \ O_M^{Z_M} b.$$

$$(ii) - O_M^{Z_M} \subseteq O_R$$

$$\left[a \ O_M^{Z_M} b \right] \Rightarrow (\forall x \in M) [(ax) Z_M (bx)] \Rightarrow (\forall x \in M) (\exists t \in M)$$

$[ax + t = bx + t]$ on en déduit : Pour tout $(x, y) \in M \times M$ il existe (t, t')
 $\in M \times M'$ tel que : $ax + t = bx + t$ et $ay + t' = by + t'$. Donc, pour tout (x, y)
 $\in M \times M$, il existe $z = t + t'$ tel que : $ax + by + z = ay + bx + z$ c.à.d. $a \ O_R \ b$.

Proposition 3.6. : Si R est l'égalité, O_R est l'anneau sur A .

Il suffit de prouver : $a \ O_R \ b$ pour tout $(a, b) \in A \times A$.

Or, pour avoir $a \ O_R \ b$ il faut trouver, pour (x, y) tel que $x = y$
 un $t \in M$ tel que l'on a

$ax + by + t = ay + bx + t$. Or ceci a lieu pour tout $t \in M$.

Proposition 3.7. : Pour tout $(x, y) \in M \times M$ on a : $O_M \subseteq O_x^y$.

En effet on a : $[a \ O_M \ b] \Rightarrow (\forall x \in M) [ax = bx]$ D'où :

pour tout $z \in M$: $[ax + by + z = ay + bx + z]$ c.à.d. $[a \ O_x^y \ b]$

Proposition 3.8. : O_M est dans l'intersection de O_x^y pour (x, y)
 par courant $M \times M$ tel que $x \not\in M^y$ et on a l'égalité si M est un semi-module.

En effet :

(i) - $O_M \subseteq \bigcap_{\substack{(x, y) \in M \times M \\ x \not\in M^y}} O_x^y$

$[a \ O_M \ b] \Rightarrow (\forall x \in M) [ax = bx] \Rightarrow (\forall (x, y) \in M \times M) x \not\in M^y$

$[ax + by + z = ay + bx + z]$ pour tout $z \in M \Rightarrow (\forall (x, y) \in M \times M) x \not\in M^y$

$[a \ O_x^y \ b]$

(ii) - Si on a : $(\forall (x, y) \in M \times M) x \not\in M^y \Rightarrow [a \ O_x^y \ b]$. M étant un

A -semi-module M contient donc un seul élément dans $Z(M)$ qui est zéro. Soit

$x \neq 0$ dans M on a : $a \ O_x^x \ b$ c.à.d. $ax + bx + t = ax + bx + t$ pour tout $t \in M$

On en déduit $ax = bx$ pour tout $x \in M$ donc $a \ O_M \ b$.

Proposition 3.9. : (i) - Si $R \subseteq O_M$, M peut-être muni d'une structure
 de A/R -demi-module.

(ii) - Si M est un A/R - demi-module, M peut alors être muni d'une structure de A - demi-module et on aura :
 $R \subseteq O_M$ pour cette structure.

(i) - En désignant, pour tout $a \in A$, par $\bar{a}$ la classe d'équivalence de a modulo R ; on pose : $\bar{a} \cdot x = a.x$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$. Cette définition ne dépend pas du choix des représentants car on a :

$$[\bar{a} = \bar{b}] \Rightarrow [a R b] \Rightarrow [a O_M b] \Rightarrow (\forall x \in M) [ax = bx]$$

On vérifie, ensuite, facilement que cette loi externe sur M définit, avec l'addition de M , une structure de A -demi-module sur M .

(ii) - Soit M un A/R - demi-module. On peut facilement définir sur M une structure de A -demi-module en posant : $a.x = \bar{a}.x$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$. De l'autre côté :

$$[a R b] \Rightarrow [\bar{a} = \bar{b}] \Rightarrow (\forall x \in M) [ax = \bar{a}x = \bar{b}x = bx] \Rightarrow [a O_M b],$$

Proposition 3.10. : On suppose avoir : $R \subseteq O_M$. Si on désigne par $\overline{O_M}$ l'ordre de M dans A/R on a :

$$\text{Pour tout } (a,b) \in A \times A : a O_M b \iff \bar{a} \overline{O_M} \bar{b}$$

$$[a O_M b] \iff (\forall x \in M) [ax = bx] \iff (\forall x \in M) [\bar{a}x = \bar{b}x] \iff \bar{a} \overline{O_M} \bar{b}.$$

Proposition 3.11. : On suppose avoir : $R \subseteq O_M$ et on considère N un sous demi-groupe du demi-groupe abélien M . Alors N est un sous- A -demi-module de M si, et seulement si N est un sous- A/R - demi-module de M .

Ceci découle immédiatement du fait d'avoir : $\bar{a}.x = a.x$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$.

Proposition 3.12. : On suppose avoir $R \subseteq O_M$ et on considère une relation d'équivalence S sur M qui vérifie (c_1) . Alors, S est une congruence du A -demi-module M si, et seulement si S est une congruence du A/R - demi-module M .

Ceci découle de la même remarque faite ci-dessus.

On déduit de ces propositions que, pour étudier M en tant que A -demi-module, il suffit parfois de le faire pour M en tant que A/R - demi-module si R est dans O_M . En particulier, si $R = O_M$ le A/R - demi-module M vérifie :

$$[\bar{a}.x = \bar{b}.x \text{ pour tout } x \in M] \Rightarrow [\bar{a} = \bar{b}],$$

CHAPITRE II

RAPPELS SUR LES DEMI-MODULES.

§ 1 - Zéroïde d'un demi-module :

Soient A un demi-anneau unitaire et M un A -demi-module unitaire. L'addition de M n'étant pas simplifiante on peut avoir une égalité de la forme suivante : $x + y = y$ où x et y sont dans M .

Définition 1.1. : On appelle zéroïde de M et on note $Z(M)$, l'ensemble des éléments $x \in M$ qui vérifie une égalité de la forme $x + y = y$ où y est dans M .

Proposition 1.1. : $Z(M)$ est un sous-demi-module fortement clos de M .

On vérifie facilement que $Z(M)$ est un sous-demi-module de M . Montrons que $Z(M)$ est égal $\widehat{Z(M)}$, soit x un élément de $\widehat{Z(M)}$. Il existe, donc, deux éléments y et z dans $Z(M)$ et un élément $t \in M$ tels que : $x + y + t = z + t$. Or y (resp. z) étant dans $Z(M)$, il existe un $y' \in M$ (resp. $z' \in M$) tel que $y + y' = y'$ (resp. $z + z' = z'$). On aura alors :

$$\begin{aligned} x + y + t + y' + z' &= x + (y + y') + t + z' = x + (t + y' + z') \\ &= z + t + y' + z' = (z + z') + t + y' = t + y' + z' \end{aligned}$$

Il en résulte, si on pose $u = t + y' + z'$, $x + u = u$ ce qui veut dire que x est dans $Z(M)$. On a donc prouvé : $\widehat{Z(M)} \subseteq Z(M)$. Mais l'autre inclusion a toujours lieu, d'où $\widehat{Z(M)} = Z(M)$.

Proposition 1.2. : Si M est muni d'un zéro pour l'addition, $Z(M)$ est la clôture forte du sous-demi-module de M engendré par 0 .

En effet, 0 est dans $Z(M)$, ce qui prouve : $A \cdot 0 \subseteq Z(M)$ et $\widehat{A \cdot 0} \subseteq Z(M)$ car $\widehat{Z(M)} = Z(M)$.

De l'autre côté, si x est dans $Z(M)$, il existe $y \in M$ tel que $x + y = y$ ce qui donne : $x + 0 + y = 0 + y$ et par suite x est dans $\widehat{A \cdot 0}$. Il en résulte $\widehat{A \cdot 0} = Z(M)$.

Exemples :

1 - Le $\mathbb{N}$ - semi-module $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nul à son zéroïde réduit 0 .

2 - Le $\mathbb{N}^*$ - semi-module $\mathbb{N}^*$ des entiers positifs a son zéroïde vide

3 - Le $\mathbb{N}^*$ demi-module M suivant
a son zéroïde égal à M tout
entier

+	x	y	z
x	y	x	z
y	x	y	z
z	z	z	z

Proposition 1.3. : Z_M est identique à la congruence modulo $Z(M)$.

En effet :

$$\left[x \equiv y \pmod{Z(M)} \right] \Rightarrow (\exists (m,n) \in Z(M) \times Z(M) (\exists t \in M) ; \\ [x + m + t = y + n + t].$$

Or, m et n sont dans $Z(M)$, il existe donc m' et n' dans M tels que :

$$m + m' = m' \text{ et } n + n' = n' \text{ d'où}$$

$$x + m + t + m' + n' = x + (\cancel{m} + m') + t + n' = x + t + m' + n' \\ = y + n + t + m' + n' = y + (n + n') + t + m' = y + t + m' + n'$$

Il existe donc un $z = t + m' + n'$ dans M tel que : $x + z = y + z$
ce qui prouve : $x Z_M y$.

Réciproquement, Z_M est contenue dans la congruence modulo $Z(M)$
puisque Z_M est la plus petite congruence simplifiante sur M (Exemple 3 du
chapitre I). La proposition en résulte immédiatement.

Proposition 1.4. : $Z(M)$ est le plus petit sous-demi-module fortement
clos de M.

Soit N un sous-demi-module fortement clos de M. On a : si x est dans
 $Z(M)$, il existe $y \in M$ tel que $x + y = y$. Il en résulte $x + n + y = n + y$ pour
tout $n \in N$ c.à.d. que x est dans $\hat{N} = N$.

Proposition 1.5. : Si N est un sous-demi-module de M on a :

$$Z(N) \subseteq Z(M) \cap N$$

L'inclusion est évidente. On pourra se demander si on n'a pas l'égalité. En général, l'égalité n'a pas lieu.

Exemple : Dans l'exemple 3 ci-dessus soit $N = \{x, y\}$

N est un sous-demi-module de M . On a :

$$Z(N) = \{y\} \neq Z(M) \cap N = M \cap N = N.$$

Proposition 1.6. : $Z(A) \cdot M \subseteq Z(M)$

Il suffit de prouver que si a est dans $Z(A)$, ax est dans $Z(M)$ pour tout $x \in M$. En effet, si a est dans $Z(A)$, il existe $b \in A$ tel que $a + b = 0$. Il en résulte que, pour tout $x \in M$, $ax + bx = bx$ c.à.d. ax est dans $Z(M)$ pour tout $x \in M$.

Corollaire : Si $Z(A)$ est non vide, $Z(M)$ est non vide.

On fera toujours cette hypothèse que $Z(A) \neq \emptyset$.

On pourra se demander si on n'a pas l'égalité $Z(A) \cdot M = Z(M)$. Il n'en est pas en général.

Exemple : Considérons toujours l'exemple 3. On a :

$$Z(M) = M \text{ tandis que } Z(A) = Z(N^*) = \emptyset.$$

Proposition 1.7. : Si M est un semi-module $Z(M)$ est réduit à un seul élément qui est un zéro pour l'addition.

Soient z et t deux éléments de $Z(M)$. (qui est non vide puisque $Z(A) \neq \emptyset$).

Il existe z' et t' dans M tel que : $z + z' = z'$ et $t + t' = t'$. On en tire : $z + z' + t' = t + t' + z'$ et comme M est un semi-module, $z = t$.

Soit w l'élément unique de $Z(M)$. Il existe un $x \in M$ tel que $x + w = x$.

On va prouver : $y + w = y$ pour tout $y \in M$. En effet :

$$[x + w = x] \Rightarrow (\forall y \in M) [x + w + y = x + y] \Rightarrow (\forall y \in M) [y + w = y]$$

puisque l'addition est simplifiable.

Proposition 1.8. : Soient R une congruence sur M et $p : M \longrightarrow M/R$ la surjection canonique. On a :

$$p(x) \in Z(M/R) \iff (\exists y \in M) [(x + y) \sim_R y]$$

En effet :

$$p(x) \in Z(M/R) \Leftrightarrow (\exists p(y) \in M/R) ; [p(x) + p(y) = p(x+y) = p(y)] \Leftrightarrow (\exists y \in M) : \\ [(x+y) R y].$$

Corollaire 1 : Si R est la congruence forte modulo un sous demi-module on a :

$$Z(M/R) = p(\hat{N})$$

En effet :

$$p(x) \in Z(M/R) \Leftrightarrow (\exists y \in M) ; [(x+y) \equiv y \pmod{N}] \Leftrightarrow (\exists (m,n) \in N \times N) ; \\ [x+y+m = y+n] \Leftrightarrow [x \in \hat{N}].$$

Corollaire 2 : Si R est simplifiante, $Z(M/R) = \{0\}$.

C'est d'ailleurs un corollaire de la proposition (1.7.).

Corollaire 3 : $Z(M/Z_M) = 0$.

Proposition 1.9. : Soit $f ; M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans un autre A-demi-module unitaire M' . On a : (i) - $f(Z(M)) \subseteq Z(M')$
(ii) - $f^{-1}(Z_{M'}) \supseteq Z(M)$.

En effet :

$$(i) - [x \in Z(M)] \Rightarrow (\exists y \in M) ; [x+y = y] \Rightarrow (\exists f(y) \in M') ;$$

$$[f(x) + f(y) = f(y)] \Rightarrow [f(x) \in Z(M')]$$

(ii) - C'est une conséquence immédiate de (i) -

On pourra se demander pour quels homomorphismes f, on a l'égalité. En effet, une classe assez importante d'homomorphismes vérifie ça.

Définition 1.2. : On dira qu'un homomorphisme $f ; M \longrightarrow M'$ de M dans un A-demi-module unitaire M' est exact à gauche (resp. à droite) si, et seulement si $f^{-1}(Z_{M'}) = Z_M$ (resp : $f(\hat{M}) = M'$)

On justifiera cette appellation plus tard.

Exemples :

1 - On verra plusieurs exemples d'homomorphismes exact à gauche. Par exemple, l'injection canonique d'un A-demi-module M dans le coproduit de M et d'un autre A-demi-module M' .

2 - Tout homomorphisme surjectif est exact à droite .

3 - Par contre il y a des homomorphismes injectifs qui ne sont pas exact à gauche. Comme exemple considérons l'exemple du $\mathbb{N}^*$ demi-module M déjà considéré et soit $N = \{x, y\}$. N est un sous-demi-module de M . Soit $f : N \rightarrow M$ l'injection canonique. On a :

Z_M est l'annulation, $f^{-1}(Z_M)$ est donc l'annulation tandis que Z_N est l'égalité et sur N ces deux congruences sont distinctes.

Proposition 1.10. : Si $f : M \rightarrow M'$ est exact à gauche, $Z(M)$ est égal à $f^{-1}(Z(M'))$.

On doit prouver que si $f(x)$ est dans $Z(M')$, x est dans $Z(M)$. En effet, si $f(x)$ est dans $Z(M')$ et si z est dans $Z(M)$, on a : $f(x) Z_M f(z)$ car tous les deux sont dans $Z(M')$. On en déduit : $x f^{-1}(Z_M) z$ ou $x Z_M z$ puisque f est exact à gauche. Il en résulte que x est dans $\bigwedge Z(M)$ c.à.d. dans $Z(M)$.

Corollaire : Soit N un sous-demi-module de M tel que l'injection canonique $i : N \rightarrow M$ soit exacte à gauche. Alors

$$Z(N) = Z(M) \cap N$$

On a :

$$Z(N) = i^{-1}(Z(M)) = Z(M) \cap N$$

2 - Coproduit d'une famille de A-demi-modules :

Soient A un demi-anneau unitaire et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-demi-modules unitaires.

Définition 2.1. : On appelle coproduit des $(M_i)_{i \in I}$ tout couple $(M, (j_i)_{i \in I})$ où M est un A-demi-module et $j_i : M_i \rightarrow M$ est un homomorphisme pour tout $i \in I$, tels que si $(E, (q_i)_{i \in I})$ est un couple où E est un A-demi-module et $q_i : M_i \rightarrow E$ est un homomorphisme pour tout $i \in I$, il existe un homomorphisme unique $h : M \rightarrow E$ tel que l'on a, pour tout $i \in I$, $q_i = h \circ j_i$.

On démontre que s'il existe deux coproduits de la famille $(M_i)_{i \in I}$, ces deux coproduits sont isomorphes.

Proposition 1.1 : Il existe un coproduit des $(M_i)_{i \in I}$.

Soit M l'ensemble des sommes formelles $\sum_{i \in I'} x_i$ ou I' est une partie finie de I et où x_i appartient à M_i pour tout $i \in I'$.

Structure sur M :

(i) - Egalité : $\sum_{i \in I_1} x_i = \sum_{i \in I_2} y_i \iff I_1 = I_2 \text{ et } (\forall i \in I_1 = I_2) [x_i = y_i]$

(ii) - Addition : $\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} y_i = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} z_i$

$$\text{où } z_i = \begin{cases} x_i + y_i & \text{si } i \in I_1 \cap I_2 \\ x_i & \text{si } i \in I_1 \text{ et } i \notin I_2 \\ y_i & \text{si } i \in I_2 \text{ et } i \notin I_1 \end{cases}$$

(iii) - Multiplication par un élément de A :

$$a \cdot \sum_{i \in I'} x_i = \sum_{i \in I'} a x_i$$

On vérifie facilement que M , muni de cette structure, est un A -demi-module.

On définit ensuite, pour tout $i \in I$, $d_i : M_i \longrightarrow M$ par

$$d_i(x_i) = \sum_{j \in J} y_j \text{ où } J = \{i\} \text{ et } y_i = x_i$$

On vérifie facilement que d_i est un homomorphisme injectif.

On vérifie ensuite que $(M, (d_i)_{i \in I})$ est un coproduit des $(M_i)_{i \in I}$. Ca sera le coproduit des $(M_i)_{i \in I}$. Il sera noté $\coprod_{i \in I} M_i$.

Remarque : $(\forall x = \sum_{i \in J} x_i \in \coprod_{i \in I} M_i) [x = \sum_{i \in J} d_i(x_i)]$

Proposition 2.2. : Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ deux familles de A -demi-modules indexées par le même ensemble I . Soit, pour tout $i \in I$, $f_i : M_i \longrightarrow M'_i$ un homomorphisme. Il existe un homomorphisme unique $f : \coprod_{i \in I} M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} M'_i$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tout $i \in I$

$i \in I$;

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f'_i} & M'_i \\ \downarrow j_i & & \downarrow j'_i \\ \coprod_{i' \in I} M_{i'} & \xrightarrow{f} & \coprod_{i' \in I} M'_{i'} \end{array}$$

Il suffit
d'utiliser la propriété
universelle du coproduit
pour la famille $(j'_i \circ f_i)_{i \in I}$. f sera noté : $\coprod_{i \in I} f_i$

Proposition 2.3. : La double opération qui à $(M_i)_{i \in I}$ fait correspondre $\coprod_{i \in I} M_i$ et à $(f_i)_{i \in I}$ fait correspondre $\coprod_{i \in I} f_i$ est un foncteur covariant.

La démonstration est classique .

Proposition 2.4. : $Z \left(\coprod_{i \in I} M_i \right) = \coprod_{i \in I} Z(M_i)$.

En effet, soit $x = \sum_{i \in I_1} x_i$ dans le coproduit M . On a $M = \coprod_{i \in I} M_i$

$$[x \in Z(M)] \Leftrightarrow (\exists y = \sum_{i \in I_2} y_i \in M) ; \left[\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} y_i = \sum_{i \in I_2} y_i \right]$$

$$\Leftrightarrow I_1 \cup I_2 = I_2 \text{ c.à.d. } I_1 \subseteq I_2 \text{ et } (\forall i \in I_1) [x_i + y_i = y_i]$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I_1) [x_i \in Z(M_i)] \Leftrightarrow \left[x = \sum_{i \in I_1} x_i \in \coprod_{i \in I} Z(M_i) \right],$$

Proposition 2.5. : $d_i ; M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$ est exact pour tout $i \in I$.

En effet, soient x_i et y_i deux éléments de M_i . On a :

$$d_i(x_i) Z_M d_i(y_i) \text{ (où } M \text{ est le coproduit)} \Leftrightarrow (\exists \sum_{i \in J} z_i \in M) ;$$

$$\left[j_i(x_i) + \sum_{i \in J} z_j = j_i(y_i) + \sum_{i \in J} z_j \right] \Leftrightarrow [x_i = y_i \text{ si } i \notin J \text{ et } x_i + z_i = y_i + z_i \text{ si } i \in J] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ Z_{M_i} & \end{array} \right]$$

Corollaire : $Z(j_i(M_i)) = Z \left(\coprod_{i \in I} M_i \right) \cap j_i(M_i)$.

Définition 2.2. : Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-demi-modules de M . On dira que M est somme directe des $(M_i)_{i \in I}$ si et seulement si l'injection canonique $\sum_{i \in I} M_i \longrightarrow M$ est un isomorphisme.

En d'autres termes, M est la somme directe des $(M_i)_{i \in I}$ si et seulement si tout élément x de M s'écrit d'une façon unique sous la forme $\sum_{i' \in I'} x_{i'}$ où $x_{i'} \in M_{i'}$ pour tout $i' \in I'$ et où I' est une partie finie de I .

Exemple : Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -demi-modules et soit M leur coproduit. M est la somme directe des $(j_i(M_i))_{i \in I}$.

Définition 2.3. : Soit $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ une suite de A -demi-modules. On dira que cette suite est exacte si, et seulement si la congruence modulo $u(M')$ est identique à l'image inverse par v de la congruence nulle $Z_{M''}$ sur M'' . c.à.d. :

$$(\forall (x,y) \in M \times M) [x \equiv y (u(M')) \iff v(x) \in Z_{M''} v(y)]$$

On définit ensuite, de la façon habituelle, les suites exactes plus longues.

D'autre part, nous pouvons, maintenant justifier l'appellation exact donnée dans la définition (1.2.) à certains homomorphismes. L'homomorphisme $u : M \rightarrow M'$ est exact à gauche (resp. à droite) si, et seulement si $u^{-1}(Z_{M'}) = Z_M$ (resp. $u(\widehat{M}) = M'$).

En effet, considérons la suite $Z(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{u} M'$ où i est l'injection canonique, cette suite est exacte si et seulement si l'on a :

$$(\forall (x,y) \in M \times M) [x \equiv y (i(Z(M))) \iff u(x) \in Z_{M'} u(y)]$$

c.à.d. si et seulement si $(\forall (x,y) \in M \times M) [x \in Z_M y \iff u(x) \in Z_{M'} u(y)]$ c.à.d. si et seulement si u est exact à gauche.

De l'autre côté, considérons le A -demi-module formé d'un seul élément x muni de la structure suivante :

$$x + x = x \text{ et } (\forall a \in A) [a \cdot x = x]. \quad \text{On notera } 0 \text{ cet } A\text{-demi-module. Cet}$$

A -demi-module spécial n'est pas un objet zéro pour la catégorie des A -demi-modules.

Par contre, il existe toujours un morphisme de tout A -demi-module sur 0 .

C'est le morphisme qui à chaque élément du A -demi-module fait correspondre l'unique élément de 0 . Considérons, maintenant la suite $M \xrightarrow{u} M' \rightarrow 0$ cette suite est exacte si, et seulement si la congruence modulo $u(M)$ est amorphe car l'image réciproque par $M' \rightarrow 0$ de Z_0 , qui est amorphe sur 0 , est l'amorphe sur M' .

Or, pour que la congruence modulo $u(M)$ sur M' soit amorphe il faut et il suffit que $\widehat{u(M)} = M'$ c.à.d. que u soit exact à droite.

Proposition 2.6. : Soient $(M_i)_{i \in I}$, $(M'_i)_{i \in I}$ et $(M''_i)_{i \in I}$ trois familles d'indexées par le même ensemble, de A -demi-modules. Soient M , M' et M'' leurs coproduits respectifs. Soient, pour tout $i \in I$, $u_i : M'_i \longrightarrow M_i$ un homomorphisme de M'_i dans M_i et $v_i : M_i \longrightarrow M''_i$ un autre de M_i dans M''_i . Soient

$$\text{enfin } u = \coprod_{i \in I} u_i \text{ et } v = \coprod_{i \in I} v_i$$

Dans ces conditions, la suite :

$$(1) \quad M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

est exacte si, et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite :

$$(2) \quad M'_i \xrightarrow{u_i} M_i \xrightarrow{v_i} M''_i$$

est exacte.

Une remarque avant d'entamer la démonstration : si $\sum_{i \in I_1} x_i$ et $\sum_{i \in I_2} y_i$ sont deux éléments de M on peut supposer $I_1 = I_2$ car si, pour tout $i \in I_1 \cup I_2$, z_i est un élément de $Z(M_i)$ on a :

$$\left(\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} z_i \right) [\equiv] \left(\sum_{i \in I_2} y_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} z_i \right) \text{ modulo } \text{Im}(u) \text{ si et}$$

seulement si $\left(\sum_{i \in I_1} x_i \right) [\equiv] \left(\sum_{i \in I_2} y_i \right) \text{ modulo } \text{Im}(u)$.

De même : $\left(\sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} z_i \right) \tilde{v}^{-1}(Z_{M''}) \left(\sum_{i \in I_2} y_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} z_i \right)$ si et

seulement si $\left(\sum_{i \in I_1} x_i \right) \tilde{v}^{-1}(Z_{M''}) \left(\sum_{i \in I_2} y_i \right)$.

Passons à la démonstration et supposons la suite (2) exacte pour tout $i \in I$.

On a :

$$\left(\sum_{i \in J_1} x_i \right) [\equiv] \left(\sum_{i \in J_2} y_i \right) (\text{Im}(u)) \Rightarrow \text{il existe } \sum_{i \in J_1} x'_i \text{ et } \sum_{i \in J_2} y'_i \text{ dans } M' \text{ et } \sum_{i \in J_1} t_i \text{ dans } M \text{ tels que :}$$

$$\sum_{i' \in J} x_{i'} + \sum_{i' \in J_1} u_{i'}(x'_{i'}) + \sum_{i' \in J'} t_{i'} = \sum_{i' \in J} y_{i'} + \sum_{i' \in J_2} u_{i'}(y'_{i'}) + \sum_{i' \in J'} t_{i'}$$

On peut supposer J' aussi large que nous voulions quitte à ajouter un même élément aux deux membres de l'égalité. De l'autre côté on peut supposer $J_1 \cup J_2 \subseteq J$ sinon soit $i \in J$ tel que $i \notin J_1 \cup J_2$ on aura $u_i(x'_i) + t_i = u_i(y'_i) + t_i$ ou $u(x'_i) + t_i = t_i$ ou $t_i = t_i + u_i(y'_i)$.

En ajoutant ces $u_i(x'_i)$ et $u_i(y'_i)$ aux t_i on peut se ramener au cas où $J_1 \cup J_2 \subseteq J$. Ceci, étant, l'égalité nous donne des égalités dans les (M_i) de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} - x_i + u_i(x'_i) + t_i &= y_i + u_i(y'_i) + t_i \\ \text{(ii)} - x_i + u_i(x'_i) + t_i &= y_i + t_i \\ \text{(iii)} - x_i + t_i &= y_i + u_i(y'_i) + t_i \\ \text{(iv)} - x_i + t_i &= y_i + t_i \end{aligned}$$

qui donnent toutes : $x_i [\equiv] y_i \pmod{u_i(M'_i)}$ et ceci pour tout $i \in I$. On en déduit :

$\mathcal{V}_i(x_i) \equiv_{M''} \mathcal{V}_i(y_i)$ pour tout $i \in I$ c.à.d. qu'il existe, pour tout $i \in I$ un $z''_i \in M''_i$

tel que $\mathcal{V}_i(x_i) + z''_i = \mathcal{V}_i(y_i) + z''_i$ ce qui donne :

$$\sum_{i' \in J} \mathcal{V}_{i'}(x_{i'}) + \sum_{i' \in J} z''_{i'} = \sum_{i' \in J} \mathcal{V}_{i'}(y_{i'}) + \sum_{i' \in J} z''_{i'}$$

$$\text{c.à.d.} \quad \mathcal{V}\left(\sum_{i' \in J} x_{i'}\right) + \sum_{i' \in J} z''_{i'} = \mathcal{V}\left(\sum_{i' \in J} y_{i'}\right) + \sum_{i' \in J} z''_{i'}$$

$$\text{et par suite} \quad \mathcal{V}\left(\sum_{i' \in J} x_{i'}\right) \equiv_{M''} \mathcal{V}\left(\sum_{i' \in J} y_{i'}\right)$$

Pour établir que $\mathcal{V}_{(Z_{M''})}$ est dans la congruence modulo $\text{Im}(u)$ on suit le chemin inverse.

Réciproquement, supposons la suite (1) exacte et prouvons que

$$M'_i \xrightarrow{u_i} M_i \xrightarrow{\mathcal{V}_i} M''_i \text{ est exacte pour tout } i \in I. \text{ On a :}$$

$$x'_i [\equiv] y_i \pmod{\text{Im}(u_i)} \Leftrightarrow (\exists (x'_i, y'_i) \in M'_i \times M'_i), (\exists t_i \in M_i);$$

$$[x_i + u_i(x'_i) + t_i = y_i + u_i(y'_i) + t_i] \Leftrightarrow (\exists (x'_i, y'_i) \in M'_i \times M'_i)$$

$$(\exists t_i \in M_i) ; [j_i(x_i) + j_i \circ u_i(x'_i) + j_i(t_i) = j_i(y_i) + j_i \circ u_i(y'_i) + j_i(t_i)]$$

$$\Leftrightarrow (\exists (x'_i, y'_i) \in M'_i \times M'_i), (\exists t_i \in M_i) ;$$

$$[j_i(x_i) + u \circ j'_i(x'_i) + j_i(t_i) = j_i(y_i) + u \circ j'_i(y'_i) + j_i(t_i)]$$

$$\Leftrightarrow [j_i(x_i) \equiv j_i(y_i) \pmod{\text{Im}(u)}] \Leftrightarrow [(v \circ j_i(x_i)) Z_{M''} (v \circ j_i(y_i))]$$

$$\Leftrightarrow [j''_i \circ v_i(x_i) Z_{M''} j''_i \circ v_i(y_i)] \Leftrightarrow [v_i(x_i) Z_{M''_i} v_i(y_i)]$$

$$\text{Il en résulte que } M'_i \xrightarrow{u_i} M_i \xrightarrow{v_i} M''_i \text{ est exacte}$$

et ceci pour tout $i \in I$.

Corollaire : u est exact à gauche (resp. à droite) si et seulement si, pour tout $i \in I$, u_i est exact à gauche (resp. à droite).

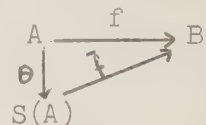
CHAPITRE III

MODELISATION DES DEMI-MODULES.

§1 - Modelisation des demi-anneaux :

Soit A un demi-anneau quelconque.

Problème 1 : Etant donné A, trouver un anneau $S(A)$ et un homomorphisme $\theta; A \longrightarrow S(A)$ tels que si B est un autre anneau et si $f; A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de A dans B, il existe un homomorphisme unique $\bar{f}; S(A) \longrightarrow B$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

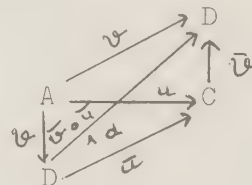


On va prouver que ce problème a une solution unique.

Proposition 1,1. : S'il existe une solution du problème 1, elle est unique.

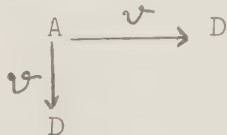
En effet, soient (C, u) et (D, v) deux solutions du problème 1.

Considérons le diagramme suivant :



on a $\bar{v} \circ \bar{u} \circ v = v$

Considérons ensuite le diagramme



Comme D est une solution, il existe un homomorphisme unique qui boucle le diagramme et le rend commutatif. Or $\bar{v} \circ \bar{u}$ et 1_D satisfont tous les deux à la condition. Ils sont donc identiques. Il en résulte : $\bar{v} \circ \bar{u} = 1_D$. De la même manière on démontre que $\bar{u} \circ \bar{v}$ est identique à 1_C , d'où l'isomorphisme de C et D.

Proposition 1.2. : Il existe une solution du problème 1.

Considérons $C = A \times A$, et sur C la relation binaire suivante :

$(a,b) R (c,d) \iff (\exists t \in A) ; [a + d + t = b + c + t]$, R est une relation d'équivalence sur C . Elle est visiblement réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive en effet :

$$\begin{aligned} (a,b) R (a',b') &\implies (\exists (t,t') \in A \times A); & \left[\begin{array}{l} a + b' + t = a' + b + t \\ a' + b'' + t' = a'' + b' + t' \end{array} \right] \\ \text{et } (a',b') R (a'',b'') & & \end{aligned}$$

$$\implies (\exists t'' = (t + t' + a' + b') \in A) \quad [a + b'' + t'' = a'' + b + t]$$

$$\implies (a, b) R (a'', b'').$$

Considérons le quotient de C par R et notons $(a - b)$ la classe de (a, b) modulo R .

Structure sur C/R :

- Addition : $(a - b) + (c - d) = ((a + c) - (b + d))$

Cette définition ne dépend pas du choix des représentants car si $(a - b) = (a' - b')$ et $(c - d) = (c' - d')$, il existerait $t \in A$ et $t' \in A$ tels que : $a + b' + t = a' + b + t$ et $c + d' + t' = c' + d + t'$.

Il en résulte : $(a + c) + (b' + d') + (t + t') = (a' + c') + (b + d) + (t + t')$ ce qui exprime : $(a + c, b + d) R (a' + c', b' + d')$ c.à.d.

$$((a + c) - (b + d)) = ((a' + c') - (b' + d')).$$

Cette addition est associative et commutative. Ces deux propriétés proviennent de l'associativité et de la commutativité de l'addition dans A .

De l'autre côté, nous avons : $(\forall (a,b) \in A \times A) [(a,a) R (b,b)]$ c.à.d.

$(a-a) = (b-b)$. Considérons cette classe. C'est un zéro pour l'addition. En effet : pour tout $(c - d) \in C/R$:

$$(c - d) + (a - a) = ((c + a) - (d + a)) . \text{ Or on a : } (c + a, d + a) R (c, d) \text{ donc :}$$

$$(c - d) + (a - a) = ((c + a) - (d + a)) = (c - d). \text{ On notera } 0 \text{ la classe } (a - a).$$

Enfin tout élément $(c - d) \in C/R$ admet un opposé

$(c' - d') \in C/R$ tel que $(c - d) + (c' - d') = 0$

En effet $(c' - d') = (d - c)$

On voit, donc, que C/R , muni de cette addition, est un groupe abélien.

Multiplication : $(a - b) (c - d) = ((ac + bd) - (ad + bc))$

Cette définition ne dépend pas du choix des représentants. Car si

$(a - b) = (a' - b')$ et $(c' - d')$ et $(c - d) = (c' - d')$ il existerait t et t' dans A tels que :

$$a + b' + t = a' + b + t \text{ et } c + d' + t' = c' + d + t'$$

On en déduit : $ac + b'c + tc = a'c + bc + tc$

$$a'd + bd + td = ad + b'd + td$$

$$b'c' + b'd + b't' = b'c + b'd' + b't'$$

$$a'c + a'd' + a't' = a'c' + a'd + a't'$$

ce qui donne :

$$(ac + bd) + (a'd' + b'c') + (b'c + a'd + b'd + a'c + tc + td + b't' + a't') = \\ = (a'c' + b'd') + (ad + bc) + (a'c + b'd + b'c + a'd + tc + td + b't' + a't')$$

ce qui exprime $(ac + bd, ad + bc) R (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$

c.à.d. $((ac + bd) - (ad + bc)) = ((a'c' + b'd') - (a'd' + b'c'))$.

Cette loi est associative vue l'associativité de la multiplication de A et sa double distributivité par rapport à l'addition.

Cette loi est aussi doublement distributive par rapport à l'addition définie ci-dessus.

On déduit que C/R , muni de cette structure est un anneau.

De l'autre côté, soit à un élément de A . On a :

$(\forall (b, c) \in A \times A) [(a + b, b) R (a + c, c)]$ c'est immédiat.

Considérons la classe ainsi définie et soit θ l'application qui à $a \in A$ fait correspondre cette classe. θ est un homomorphisme. En effet

$$\theta(a + a') = ((a + a' + b) - b) = ((a + a' + b + b) - (b + b))$$

$$= ((a + b) - b) + ((a' + b) - b) = \theta(a) + \theta(a')$$

$$\theta(aa') = ((aa' + b) - b)$$

$$\theta(a) \theta(a') = [(a + c) - c] [(a' + c') - c']$$

$$\begin{aligned}
 &= [(a + c) (a' + c') + cc' - [(a + c) c' + c (a' + c')]] \\
 &= (a a' + a c' + c a' + c c' + c c' - (a c' + c c' + c a' + c c')) \\
 &= ((a a' + b) - b)
 \end{aligned}$$

en prenant $b = a c' + c a' + c c'$.

On a donc $\sigma(a a') = \sigma(a) \sigma(a')$.

Montrons maintenant que $(C/R, \sigma)$ est une solution du problème 1.

Soient B un anneau et $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de A dans B .

On définit $\bar{f} : C/R \longrightarrow B$ par : $\bar{f}((a - b)) = f(a) - f(b)$ cette définition ne dépend pas du choix des représentants. Car si $(a - b) = (a' - b')$ il existe $t \in A$ tel que : $a + b' + t = a' + b + t$ ce qui implique : $f(a) + f(b') + f(t) = f(a') + f(b) + f(t)$ et comme nous sommes dans un anneau, ceci donne $f(a) - f(b) = f(a') - f(b')$.

Montrons que $\bar{f}$ est un homomorphisme :

$$\begin{aligned}
 (i) - \bar{f}((a - b) + (c - d)) &= \bar{f}((a + c) - (b + d)) = f(a + c) - f(b + d) \\
 &= f(a) + f(c) - (f(b) + f(d)) = f(a) - f(b) + f(c) - f(d) \\
 &= \bar{f}((a - b)) + \bar{f}((c - d)). \\
 (ii) - \bar{f}((a - b)(c - d)) &= \bar{f}((a c + b d) - (a d + b c)) = f(a c + b d) - f(a d + b c) \\
 &= f(a) f(c) + f(b) f(d) - f(a) f(d) - f(b) f(c) \\
 &= [f(a) - f(b)] [f(c) - f(d)] = \bar{f}((a - b)) \bar{f}((c - d)).
 \end{aligned}$$

Montrons que $\bar{f}$ rend le diagramme commutatif. En effet :

$$(\forall a \in A) [(\bar{f} \circ \sigma)(a) = \bar{f}((a + b) - b) = f(a + b) - f(b) = f(a)]$$

Enfin, montrons que $\bar{f}$ est l'unique homomorphisme de C/R dans B qui rend le diagramme commutatif.

Soit $g : C/R \longrightarrow B$ un homomorphisme de C/R dans B tel que $g \circ \sigma = f$.

On a :

$$\begin{aligned}
 (\forall (a - b) \in C/R) [(a - b) &= ((a + c) - c) - ((b + c) - c) = \sigma(a) - \sigma(b)] \\
 \implies (\forall (a - b) \in C/R) [g((a - b)) &= g(\sigma(a) - \sigma(b)) = (g \circ \sigma)(a) - (g \circ \sigma)(b) \\
 &= f(a) - f(b) = \bar{f}((a - b))] \implies g = \bar{f}
 \end{aligned}$$

$(C/R, \theta)$ est donc une solution du problème 1. Comme ce problème a au plus une solution, $(C/R, \theta)$ est l'unique solution. Dans la suite on notera $S(A)$ au lieu de C/R .

Définition 1.1. : On appelle modelisé du demi-anneau A l'anneau $S(A)$ solution du problème 1.

Remarque : Cette construction est un peu analogue à celle de l'anneau des fractions d'un anneau commutatif par rapport à une partie multiplicative. Il y a toutefois une distinction à faire. Tandis que la construction de l'anneau des fractions nous laisse dans la catégorie des anneaux, sauf si l'anneau est intègre, notre construction nous fait sortir de la catégorie des demi-anneaux à celle des anneaux.

Proposition 1.3. : Si A est commutatif, $S(A)$ est commutatif.

$$\begin{aligned} (a - b) (c - d) &= (a c + b d) - (a d + b c) = (c a + d b) - (d a + c b) \\ &= (c - d) (a - b) \end{aligned}$$

Proposition 1.4. : Si A est unitaire, $S(A)$ est unitaire.

L'unité de $S(A)$ est $\theta(1)$ en effet :

$$\begin{aligned} (a - b) \theta(1) &= (\theta(a) - \theta(b)) \theta(1) = \theta(a) \theta(1) - \theta(b) \theta(1) \\ &= \theta(a \cdot 1) - \theta(b \cdot 1) = \theta(a) - \theta(b) = (a - b). \\ &= \theta(1 a) - \theta(1 b) = \theta(1) \theta(a) - \theta(1) \theta(b) \\ &= \theta(1) (\theta(a) - \theta(b)) = \theta(1) (a - b) \end{aligned}$$

Proposition 1.5. : $R_{\theta} = Z_A$ la congruence nulle sur A .

En effet :

$$\begin{aligned} a R_{\theta} b &\Rightarrow \theta(a) = \theta(b) \Rightarrow ((a + c) - c) = ((b + c) - c) \Rightarrow (\exists t \in A) ; \\ [a + c + c + t = b + c + c + t] &\Rightarrow a Z_A b. \end{aligned}$$

On a donc $R_{\theta} \subseteq Z_A$.

De l'autre côté R_{θ} est simplifiante :

$$\begin{aligned} (a + c) R_{\theta} (b + c) &\Rightarrow \theta(a + c) = \theta(b + c) \Rightarrow \theta(a) + \theta(c) = \theta(b) + \theta(c) \\ &\Rightarrow \theta(a) = \theta(b) \text{ car nous sommes dans un anneau} \Rightarrow a R_{\theta} b. \end{aligned}$$

Il en résulte que Z_A est dans R_{θ} puisque Z_A est la plus petite

congruence simplifiante sur A.

Il en résulte : $Z_A = R_\theta$.

Corollaire : Si A est un semi-anneau θ est une injection car si A est un semi-anneau, Z_A est l'égalité.

Proposition 1.6. : Soient A' un autre demi-anneau et $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme de A dans A' . Il existe un homomorphisme unique $S(f) : S(A) \longrightarrow S(A')$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta' \\ S(A) & \xrightarrow{S(f)} & S(A') \end{array}$$

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & A' & \xrightarrow{\theta'} & S(A') \\ \downarrow \theta & & & & \\ S(A) & & & & \end{array}$$

La propriété universelle de $S(A)$ prouve l'existence d'un homomorphisme unique $g : S(A) \longrightarrow S(A')$ tel que : $g \circ \theta = \theta' \circ f$. $S(f)$ n'est autre chose que g .

Proposition 1.7. L'opération qui à chaque demi-anneau A fait correspondre l'anneau $S(A)$ et à chaque $f \in \text{Hom}(A, A')$ fait correspondre $S(f) \in \text{Hom}(S(A), S(A'))$ est un foncteur covariant défini sur la catégorie des demi-anneaux et à valeurs dans celle des anneaux. Il sera noté S_a .

Il suffit de prouver que $S(1_A)$ n'est autre chose que $1_{S(A)}$ et que si on a : $A \xrightarrow{u} A' \xrightarrow{v} A''$ $S(vu) = S(v) \circ S(u)$. En effet : $S(1_A)$ et $1_{S(A)}$ rendent tous deux le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ S(A) & \xrightarrow{S(1_A)} & S(A) \end{array}$$

$1_{S(A)}$

On en déduit, grâce à la proposition (1.6.), $S(1_A) = 1_{S(A)}$

D'autre part, si on considère le diagramme global suivant on a deux homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & A' & \xrightarrow{v} & A'' \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta' & & \downarrow \theta'' \\ S(A) & \xrightarrow{S(u)} & S(A') & \xrightarrow{S(v)} & S(A'') \\ & \searrow S(vou) & & & \end{array}$$

$S(vou)$ et $S(v) \circ S(u)$ qui bouclent le diagramme suivant et les rendent commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{vou} & A'' \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta'' \\ S(A) & & S(A'') \end{array}$$

D'après la proposition (1.6.) ces deux homomorphismes sont identiques, d'où : $S(vou) = S(v) \circ S(u)$.

Remarque On peut faire la même construction en faisant correspondre, d'abord, au demi-anneau A le semi-anneau A/Z_A et en plongeant ensuite A/Z_A dans l'anneau $S(A)$.

§ 2 - Modelisation d'un demi-module :

Soient A un demi anneau et M un A - demimodule.

Définition 2.1. Soit E un $S(A)$ - module. On appelle semi-morphisme de M dans E , toute application $f : M \longrightarrow E$ qui vérifie :

- (i) - $(\forall (x,y) \in M \times M) [f(x+y) = f(x) + f(y)]$
- (ii) - $(\forall x \in M) (\forall a \in A) [f(ax) = \theta(a) f(x)]$

Problème 2 : Etant donné A et M , trouver un $S(A)$ -module $S(M)$ et un semi-morphisme $\lambda : M \longrightarrow S(M)$ tels que si E est un $S(A)$ - module et si $f : M \longrightarrow E$ est un semi-morphisme de M dans E , il existe un homomorphisme $\bar{f} : S(M) \longrightarrow E$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow \lambda & \searrow \bar{f} & \\ S(M) & & \end{array}$$

Comme on a fait pour construire $S(A)$ on démontre :

Proposition 2.1. : Si le problème 2 admet de solutions, il n'en admet qu'une.

On démontre, d'une façon analogue à ce qui a été fait dans la démonstration de la proposition (1.1.), que si le problème 2 admet deux solutions, ces deux solutions sont isomorphes.

Proposition 2.2. : Le problème 2 admet une solution :

On considère $M \times M$ et on y définit la relation :

$$(x, y) R' (x', y') \iff \exists z \in M : [x + y' + z = x' + y + z]$$

on montre que R' est une relation d'équivalence.

On considère ensuite $M \times M/R'$ et on note $(x - y)$ la classe de (x, y) modulo R' . On définit ensuite sur $M \times M/R'$ la structure suivante :

Structure sur $M \times M/R'$:

Addition : $(x - y) + (x' - y') = ((x + x') - (y + y'))$

Loi externe : $(a - b) (x - y) = ((a x + b y) - (a y + b x))$.

On vérifie, comme dans la démonstration de la proposition (1.2.), que ces définitions ne dépendent pas du choix des représentants, que l'addition est une loi de groupe abélien et que $M \times M/R'$, muni de cette structure, est un $S(A)$ -module.

On définit λ comme on a définie σ .

$$(\forall x \in M) \quad [\lambda(x) = ((x + y) - y)].$$

On vérifie ensuite que λ est un semi-morphisme.

On vérifie, enfin, que $(M \times M/R', \lambda)$ est une solution du problème 2. C'est donc l'unique solution. Le $S(A)$ -module $M \times M/R'$ est bien, donc, le $S(M)$ recherché.

Définition 2.2. : On appelle modelisé de A -demi-module M le $S(A)$ -module $S(M)$ solution du problème 2.

Proposition 2.3. : $R\lambda = Z_M$.

Même démonstration que la proposition (1.5.)

Proposition 2.4. : Soit $f ; M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans un autre A -demi-module. Il existe un homomorphisme unique $S(f) ; S(M) \longrightarrow S(M')$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda' \\ S(M) & \xrightarrow{S(f)} & S(M') \end{array}$$

considérons l'application $g = \lambda' \circ f$.

C'est une application de M dans un $S(A)$ - module $S(M')$. g est un semi-morphisme. En effet, il est immédiat que $g(x + y) = g(x) + g(y)$ car λ' et f vérifient tous deux des propriétés analogues. De l'autre côté :

$$\begin{aligned} (\forall x \in M) (\forall a \in A) [g(ax) &= (\lambda' \circ f)(ax) = \lambda'(f(ax)) = \lambda'(a f(x)) \\ &= \theta(a) \lambda'(f(x)) = \theta(a) g(x)] \end{aligned}$$

puisque λ' est un semimorphisme de M' dans $S(M')$.

Il existe donc un homomorphisme $\bar{g} ; S(M) \longrightarrow S(M')$ tel que $\bar{g} \circ \lambda = g = \lambda' \circ f$. $\bar{g}$ est le $S(f)$ recherché.

Proposition 2.5. : L'opération qui à chaque A -demi-module M fait correspondre le $S(A)$ - module $S(M)$ et à chaque $f \in \text{Hom}_A(M, M')$ fait correspondre $S(f) \in \text{Hom}(S(M), S(M'))$ est un foncteur covariant $S(A)$ défini sur la catégorie des A -demi-modules et à valeurs dans celles des $S(A)$ - modules. Il sera noté S_m .

La démonstration est analogue à celle de la proposition (1.7.).

§ 3 - Propriétés du foncteur S_m :

Soient A un demi-anneau.

Proposition 3.1. : Le foncteur S_m est additif et exact.

- S_m additif : Soient u, v dans $\text{Hom}_A(M, M')$. Il faut prouver que dans $\text{Hom}_{S(A)}(S(M), S(M'))$ on a : $S(u + v) = S(u) + S(v)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
 (\forall (x - y) \in S(M)) \quad [S(u + v) (x - y) &= ((u + v) (x) - (u + v) (y)) \\
 &= (u (x) + v(x)) - (u (y) + v(y)) = (u (x) - u (y)) + (v(x) - v(y)) \\
 &= S(u) (x - y) + S(v) (x - y) = (S(u) + S(v)) (x - y)]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$S(u + v) = S(u) + S(v)$$

- S_m exact :

Soit $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ une suite exacte de A- demi-modul

$$\begin{array}{ccccc}
 M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' \\
 \downarrow \theta' & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta'' \\
 S(M') & \xrightarrow{S(u)} & S(M) & \xrightarrow{S(v)} & S(M'')
 \end{array}$$

est exacte en effet :

$$(x - y) \in \text{Im } S(u) \iff (\exists (x' - y') \in S(M')) : [(x - y) = S(u) (x' - y') = (u(x') - u(y'))]$$

$$\begin{aligned}
 &\iff (\exists t \in M) ; [x + u(y') + t = y + u(x') + t] \iff [x \equiv y \text{ modulo } u(M')] \\
 &\iff [x \cdot v'(Z_{M''}) y] \text{ puisque la première suite est exacte } \iff [v(x) \cdot Z_{M''} v(y)] \iff [(\lambda' \circ v) (x) = \lambda' \circ v(y)]
 \end{aligned}$$

$$\iff [(S(v) \circ \lambda) (x) = (S(v) \circ \lambda) (y)] \text{ puisque le diagramme est commutatif}$$

$$\iff [S(v) (\lambda(x) - \lambda(y)) = S(v) (x - y) = 0] \iff [(x - y) \in \text{Ker } (S(v))] \text{ Il en résulte :}$$

$$\text{Im } (S(u)) = \text{Ker } (S(v))$$

Proposition 3.2. : Réciproquement, si la suite :

$$S(M') \xrightarrow{S(u)} S(M) \xrightarrow{S(v)} S(M'')$$

est exacte la suite :

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

est exacte

En effet :

$$[x \equiv y \text{ (u(M'))}] \iff (\exists (x', y') \in M' \times M') (\exists t \in M) ;$$

$$[x + u(x') + t = y + u(y') + t] \iff (\exists (x', y') \in M' \times M') ;$$

$$[(x - y) = (u(y') - u(x'))] \iff (\exists (y' - x') \in S(M')) ; [(x - y) = S(u) (y' - x')]]$$

$$\iff [x - y \in \text{Im } S(u)] \iff [x - y \in \text{Ker } S(v)] \iff [S(v) (x - y) = 0]$$

$$\iff [S(v) (\lambda(x) - \lambda(y)) = 0] \iff [S(v) \circ \lambda(x) = S(v) \circ \lambda(y)] .$$

$$\iff [\lambda'' \circ v(x) = (\lambda'' \circ v)(y)] \iff [v(x) - v(y) \in \text{Ker } \lambda''] \iff [x - y \in \text{Ker } v]$$

Corollaire : Soit $u ; M \longrightarrow M'$ un homomorphisme u est exact à gauche (resp. à droite) si et seulement si $S(u)$ est injectif (resp. surjectif).

Proposition 3.3 : Si $f ; M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme surjectif $S(f)$ est surjectif.

En effet, si f est surjectif, f est exact à droite et $S(f)$ est par conséquent surjectif. On peut ~~un~~ démontrer ceci directement : $(\forall (a' - b') \in S(M'))$

$$(\exists (a, b) \in M \times M)$$

$$[a' = f(a) \text{ et } b' = f(b)] \implies (\forall (a' - b') \in S(M')) (\exists (a - b) \in S(M)) ;$$

$$[(a' - b') = (f(a) - f(b)) = S(f) (a - b)] \implies (a' - b') \in \text{Im } (S(f)).$$

Proposition 3.4. : S_m commute avec le coproduit.

Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -demi-modules et $M = \coprod_{i \in I} M_i$ leur coproduit. On va démontrer que $S(M)$ est isomorphe à $\coprod_{i \in I} S(M_i)$

Considérons le diagramme suivant :

où $d_i ; M_i \longrightarrow M$ (resp. $J_i ; S(M_i) \longrightarrow S(M)$) est l'injection canonique et

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{J_i} & M \\ \downarrow \lambda_i & \searrow S(J_i) & \downarrow \lambda \\ S(M_i) & \xrightarrow{S(J_i)} & S(M) \\ \downarrow J_i & \swarrow \tilde{J} & \downarrow \tilde{f} \\ \coprod_{i \in I} S(M_i) & & S(M) \end{array}$$

et $\lambda_i ; M_i \longrightarrow S(M_i)$ (resp. $\lambda ; M \longrightarrow S(M)$) l'homomorphisme canonique.

D'après la définition du coproduit d'une famille de $S(A)$ - modules, il existe un homomorphisme unique $\mathcal{T} : \coprod_{i \in I} S(M_i) \longrightarrow S(M)$ tel que $\mathcal{T} \circ \mathcal{J}_i = S(\lambda_i)$ pour tout $i \in I$. Explicitons l'action de $\mathcal{T}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left(\sum_i \mathcal{J}_i (x_i - y_i) \right) &= \sum_i \mathcal{T} \circ \mathcal{J}_i (x_i - y_i) = \sum_i S(\lambda_i) (x_i - y_i) \\ &= \sum_i S(\lambda_i) (\lambda_i(x_i) - \lambda_i(y_i)) = \sum_i (S(\lambda_i) \circ \lambda_i) (x_i) - \sum_i (S(\lambda_i) \circ \lambda_i) (y_i) \\ &= \sum_i (\lambda \circ j_i) (x_i) - \sum_i (\lambda \circ j_i) (y_i) = \lambda \left(\sum_i j_i (x_i) \right) - \lambda \left(\sum_i j_i (y_i) \right) \\ &= \left(\sum_i j_i (x_i) \right) - \left(\sum_i j_i (y_i) \right) \end{aligned}$$

De l'autre côté soit $f_i = \mathcal{J}_i \circ \lambda_i ; M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} S(M_i)$ et soit $f = \coprod_{i \in I} f_i ; M \longrightarrow \coprod_{i \in I} S(M_i)$. La propriété universelle de $S(M)$ prouve qu'il existe un homomorphisme unique $\bar{f} : S(M) \longrightarrow \coprod_{i \in I} S(M_i)$ tel que $\bar{f} \circ \lambda = f$.

Explicitons l'action de $\bar{f}$.

$$\begin{aligned} \bar{f} \left(\left(\sum_{i \in I_1} j_i (x_i) \right) - \left(\sum_{i \in I_2} j_i (x_i) \right) \right) &= \bar{f} \left(\sum_{i \in I_1} j_i (x_i) \right) - \bar{f} \left(\sum_{i \in I_2} j_i (x_i) \right) \\ &= \sum_{i \in I_1} \bar{f} \circ j_i (x_i) - \sum_{i \in I_2} \bar{f} \circ j_i (x_i) = \sum_{i \in I_1} f_i (x_i) - \sum_{i \in I_2} f_i (x_i) \end{aligned}$$

On va, maintenant, prouver que $\bar{f}$ et $\mathcal{T}$ sont deux homomorphismes réciproques l'un de l'autre.

$$\begin{aligned} (\bar{f} \circ \mathcal{T}) \left(\sum_i \mathcal{J}_i (x_i - y_i) \right) &= \bar{f} \left(\left(\sum_i j_i (x_i) \right) - \left(\sum_i j_i (y_i) \right) \right) \\ &= \sum_i \bar{f} \circ j_i (x_i) - \sum_i \bar{f} \circ j_i (y_i) = \sum_i \mathcal{J}_i \circ \lambda_i (x_i) - \sum_i \mathcal{J}_i \circ \lambda_i (y_i) \\ &= \sum_i \mathcal{J}_i (\lambda_i(x_i) - \lambda_i(y_i)) = \sum_i \mathcal{J}_i (x_i - y_i). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\bar{f} \circ \mathcal{T}$ est égal à $1 : \coprod_{i \in I} S(M_i) \longrightarrow \coprod_{i \in I} S(M_i)$

$$= (\mathcal{T} \circ \bar{f}) \left(\left(\sum_{i \in I_1} j_i (x_i) \right) - \left(\sum_{i \in I_2} j_i (y_i) \right) \right) = \mathcal{T} \left(\sum_{i \in I_1} f_i (x_i) \right) - \mathcal{T} \left(\sum_{i \in I_2} f_i (y_i) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in I_1} (\mathcal{T} \circ \mathcal{T}_i \circ \lambda_i) (x_i) - \sum_{i \in I_2} (\mathcal{T} \circ \mathcal{T}_i \circ \lambda_i) (y_i) \\
 &= \sum_{i \in I_2} (S(j_i) \circ \lambda_i) (x_i) - \sum_{i \in I_2} (S(j_i) \circ \lambda_i) (y_i) \\
 &= \sum_{i \in I_2} (\lambda \circ j_i) (x_i) - \sum_{i \in I_2} (\lambda \circ j_i) (y_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I_1} j_i (x_i) \right) - \lambda \left(\sum_{i \in I_2} j_i (y_i) \right) \\
 &= \left(\sum_{i \in I_1} j_i (x_i) \right) - \left(\sum_{i \in I_2} j_i (y_i) \right)
 \end{aligned}$$

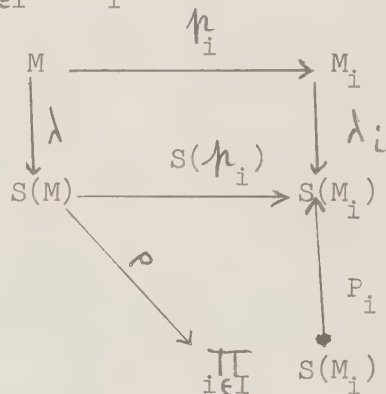
Il en résulte que $\mathcal{T} \circ \bar{f}$ est égal à 1_M . $\mathcal{T}$ et $\bar{f}$ sont donc réciproques l'un de l'autre et par suite $S(M)$ est isomorphe à $\prod_{i \in I_1} S(M_i)$.

Proposition 3.5. : S_m commute avec le produit direct.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -demi-modules et soit $M = \prod_{i \in I} M_i$ leur produit. On doit prouver que $S(M)$ est isomorphe à $\prod_{i \in I} S(M_i)$.

Considérons le diagramme suivant :

La définition du produit direct d'une famille de $S(A)$ - modules prouve qu'il existe un homomorphisme unique $P : S(M) \rightarrow \prod_{i \in I} S(M_i)$ tel que : $P_i \circ P = S(\mu_i)$ pour tout $i \in I$.



On va prouver que P est un isomorphisme :

- P est une injection :

$$P((x_i) - (y_i)) = 0 \implies (\forall i \in I) [(P_i \circ P)((x_i) - (y_i)) = 0]$$

$$\implies (\forall i \in I) [S(\mu_i)((x_i) - (y_i)) = 0] \implies (\forall i \in I)$$

$$[\mu_i((x_i)) - \mu_i((y_i)) = 0] \implies (\forall i \in I) [(x_i - y_i) = 0]$$

$$\implies (\forall i \in I) [x_i \equiv_{M_i} y_i] \implies (\forall i \in I) (\exists z_i \in M_i) ;$$

$$[x_i + z_i = y_i + z_i] \implies (\exists (z_i) \in M) ;$$

$$[(x_i) + (z_i) = (y_i) + (z_i)] \Rightarrow [(x_i) - (y_i) = 0] \Rightarrow [(x_i) - (y_i) = 0]$$

- P est une surjection :

$$\begin{aligned} (\forall ((x_i) - (y_i)) \in \prod_{i \in I} S(M_i)) \quad [((x_i) - (y_i)) = ((p_i(x_i)) - (p_i(y_i))) \\ = (S(p_i)((x_i) - (y_i))) = (P_i \circ P((x_i) - (y_i))) = P((x_i) - (y_i))] \end{aligned}$$

Proposition 3.6. : Soient M et M' deux A-demi-modules. Il existe un homomorphisme canonique de $S(\text{Hom}_A(M, M'))$ dans $\text{Hom}_{S(A)}(S(M), S(M'))$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, M') & \xrightarrow{S} & \text{Hom}_{S(A)}(S(M), S(M')) \\ \downarrow \lambda & \searrow \psi & \\ S(\text{Hom}_A(M, M')) & & \end{array}$$

où S est l'application qui à $u \in \text{Hom}_A(M, M')$ fait correspondre $S(u) \in \text{Hom}_{S(A)}(S(M), S(M'))$ et λ est l'homomorphisme canonique.

Il s'agit de remarquer que $S : f \mapsto S(f)$ est un homomorphisme de $\mathbb{N}$ -demi-module du fait que le foncteur S_m est additif. L'existence de ψ découle de la propriété universelle de $S(\text{Hom}_A(M, M'))$

Proposition 3.7. : Si M' est un A-semi-module, ψ est injectif.

si M' est un A-semi-module, λ' est injectif. D'où : si $\psi((u - v)) = 0$,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & M' \\ \downarrow \lambda & \searrow \psi & \downarrow \lambda' \\ S(M) & \xrightarrow[S(v)]{S(u)} & S(M') \end{array}$$

$S(u) - S(v)$ est nul donc $S(u) = S(v)$. Ceci donne :

$S(u) \circ \lambda = S(v) \circ \lambda$ c.à.d. $\lambda' \circ u = \lambda' \circ v$, ce qui donne $u = v$ puisque λ' est une injection.

§ 4 - Relations entre les congruences simplifiantes sur M et les sous-modules de S(M):

Soient A un demi-anneau et M un A - demi-module. Soient, d'autre part, R une congruence simplifiante sur M et N un sous module de S(M).

On considère dans S(M) la partie suivante :

$$M(R) = \{(x - y) \in S(M), \quad x R y\}.$$

La définition de M(R) ne dépend pas du choix des représentants. En effet, si $(x - y) = (x' - y')$ et si $x R y$, il existe, alors, $t \in M$ tel que $x + y' + t = x' + y + t$ et $x R y$. Comme R est simplifiante, on en déduit : $x' R y'$.

De l'autre côté, considérons sur M la relation suivante :

$$x \mathcal{C}(N) y \iff (x - y) \in N.$$

Proposition 4.1. : M(R) est un sous-module de S(M).

En effet :

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} - (x - y) \in M(R) \\ \text{et } (x' - y') \in M(R) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & x R y \quad \Rightarrow \quad (x + y') R (x' + y) \\ & \text{et } x' R y' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad ((x + y') - (x' + y)) \in M(R) \end{aligned}$$

$$\in M(R) \Rightarrow ((x - y) - (x' - y')) \in M(R)$$

$$- (x - y) \in M(R) \Rightarrow x R y \Rightarrow (\forall (a,b) \in A \times A) [(ax) R (ay) \text{ et } (bx) R (by)]$$

$$\Rightarrow (\forall (a,b) \in A \times A) [(ax + by) R (ay + bx)] \Rightarrow (\forall (a - b) \in S(A))$$

$$[(a - b)(x - y) = ((ax + by) - (ay + bx)) \in M(R)]$$

Proposition 4.2. : C(N) est une congruence simplifiante

1 - C(N) est une relation d'équivalence :

$$- x \mathcal{C}(N) x \text{ car } (x - x) = 0 \in N \text{ pour tout } x \in M.$$

$$- x \mathcal{C}(N) y \Rightarrow (x - y) \in N \Rightarrow -(x - y) = (y - x) \in N \Rightarrow y \mathcal{C}(N) x$$

$$- x \mathcal{C}(N) y \Rightarrow (x - y) \in N \Rightarrow (x - y) - (y - z) = (x - z) \in N$$

$$\text{et } y \mathcal{C}(N) z \text{ et } (y - z) \in N$$

$$\Rightarrow x \mathcal{C}(N) z.$$

2 - $C(N)$ vérifie les axiomes (C'_1) et (C_2) .

- $x C(N) y \Rightarrow (x - y) \in N \Rightarrow ((x + z) - (y + z) \in N)$ pour tout $z \in M$.

$\Rightarrow (x + z) C(N) (y + z)$ pour tout $z \in M$

- $x C(N) y \Rightarrow [(x - y) \in N] \Rightarrow (\forall a \in A) [\theta(a) (x - y) \in N]$

$\Rightarrow (\forall a \in A) [(ax - ay) \in N] \Rightarrow (\forall a \in A) [(ax) C(N) (ay)]$

3 - $C(N)$ vérifie l'axiome (S')

$(x + z) C(N) (y + z) \Rightarrow ((x + z) - (y + z)) = (x - y) \in N \Rightarrow x C(N) y$

Désignons par $\mathcal{M}$ la classe des sous-modules de $S(M)$ et par $\mathcal{E}$ celle des congruences simplifiantes sur M . Nous avons une application $M; \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ qui à $R \in \mathcal{E}$ fait correspondre $M(R)$; et une application $C; \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ qui à $N \in \mathcal{M}$ fait correspondre $C(N) \in \mathcal{E}$.

Proposition 4.3. : Les applications M et C sont réciproques l'une de l'autre.

En effet : Pour tout $R \in \mathcal{E}$

$x C(M(R)) y \Leftrightarrow (x - y) \in M(R) \Leftrightarrow x R y$

et pour tout $N \in \mathcal{M}$

$(x - y) \in M(C(N)) \Leftrightarrow x C(N) y \Leftrightarrow (x - y) \in N$

Proposition 4.4. : L'application M (resp C) est croissante

$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow M(R_1) \subseteq M(R_2)$, en effet :

$(x - y) \in M(R_1) \Rightarrow x R_1 y \Rightarrow x R_2 y \Rightarrow (x - y) \in M(R_2)$

Proposition 4.5. : M (resp. C) est compatible avec l'intersection :

Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de congruences simplifiantes sur M . On a :

$(x - y) \in M(\bigcap_{i \in I} R_i) \Leftrightarrow x (\bigcap_{i \in I} R_i) y \Leftrightarrow (\forall i \in I) [x R_i y]$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I) [(x - y) \in M(R_i)] \Leftrightarrow (x - y) \in \bigcap_{i \in I} M(R_i)$$

Proposition 4.6. : Soit E une partie de $M \times M$ et soit R la congruence simplifiante sur M engendrée par E. On a : $M(R)$ est le sous-module de $S(M)$ engendrée par les $\{(x - y) \mid (x, y) \in E\}$.

Soit N le sous-module de $S(M)$ engendrée par les $\{(x - y) \mid (x, y) \in E\}$.
On a :

$$\begin{aligned} - (\forall (x, y) \in E) \quad [x R y] &\Rightarrow (\forall (x, y) \in E) \quad [(x - y) \in M(R)] \\ &\Rightarrow N \subseteq M(R). \end{aligned}$$

- Soit d'autre part N' un sous-module de $S(M)$ contenant N. N' est de la forme $M(R')$. On a :

$$(x, y) \in E \Rightarrow (x - y) \in N \Rightarrow (x - y) \in N' \Rightarrow x R' y.$$

Il en résulte : $R \subseteq R'$ et par suite $M(R) \subseteq M(R')$, $M(R)$ est donc le plus petit sous-module de $S(M)$ contenant les $\{(x - y) \mid (x, y) \in E\}$, c'est donc N.

Corollaire 1 : Si $(R_i)_{i \in I}$ est une famille de congruences simplifiantes sur M on a :

$$M\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \sum_{i \in I} M(R_i)$$

Le membre de gauche est le sous-module de $S(M)$ engendré par les $\{(x - y) \mid \text{où } (x - y) \text{ vérifie au moins } x R_i y. \text{ C'est donc le sous-module de } S(M) \text{ engendré par } \bigcup_{i \in I} M(R_i) \text{ . c.à.d. } \sum_{i \in I} M(R_i) \}$.

Corollaire 2 : Si F est une partie de $S(M)$ et si R est la congruence simplifiante engendrée par $\{(x, y) \mid (x - y) \in F\}$ on a : $M(R)$ est le sous-module de $S(M)$ engendré par F.

Corollaire 3 : Si $(N_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-module de $S(M)$ on a :

$$C\left(\sum_{i \in I} N_i\right) = \bigcup_{i \in I} C(N_i).$$

Corollaire 4 : R est de type fini $\Leftrightarrow M(R)$ est de type fini

Cas des demi-anneaux : Si R est une congruence à gauche simplifiante sur A , R est alors une congruence simplifiante sur le A - demi-module à gauche A . $M(R)$ est donc un sous-module du $S(A)$ - module à gauche $S(A)$ c.à.d. un idéal à gauche de $S(A)$.

Réciproquement si I est un idéal à gauche de $S(A)$, $C(I)$ est une congruence à gauche simplifiante sur A .

Le même raisonnement est valable à droite. De plus, R est une congruence bilatère simplifiante sur A si, et seulement si $M(R)$ est un idéal bilatère de $S(A)$.

Proposition 4.7. : Soient R une congruence à gauche simplifiante sur A (resp. I un idéal à gauche de $S(A)$) et T une congruence simplifiante sur M (resp. N un sous-module de $S(M)$).

On a :

$$\begin{aligned} M(R \cap T) &= M(R) \cap M(T) \\ (\text{resp. } C(I \cap N) &= C(I) \cap C(N)). \end{aligned}$$

$M(R \cap T)$ est le sous-module de $S(M)$ engendré par les $\{(ax + by) - (ay + bx)\}$ où $a R b$ et $x T y$ (proposition (4.6.)).

C'est donc le sous-module de $S(M)$ engendré par les $\{(a - b)(x - y)\}$ où $(a - b) \in M(R)$ et $(x - y) \in M(T)$ c.à.d. $M(R) \cap M(T)$.

Proposition 4.8. : Soit $f : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme de M dans un autre A - demi-module M' . On a : $M \cap (f(R)) = S(f) \cap (M(R))$

On a :

$$\begin{aligned} (x' - y') \in M(f(R)) &\Leftrightarrow x' f(R) y' \\ \Leftrightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) ; [x R y \text{ et} \\ (x' + f(x)) \sim_{M'} (y' + f(y))] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(M) & \xrightarrow{S(f)} & S(M') \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\exists (y - x) \in M(R)) ; [(x' - y') = (f(y) - f(x)) = S(f)(y - x)].$$

$$\Leftrightarrow (x' - y') \in S(f) \cap (M(R)).$$

Proposition 4.9. : Soient $f ; M \longrightarrow M'$ un homomorphisme et R' une congruence simplifiante sur M' . On a :

$$M(f^{-1}(R')) = S(f)^{-1}(M(R'))$$

$$\begin{aligned} (x - y) \in M(f^{-1}(R')) &\iff x f^{-1}(R') y \iff f(x) R' f(y) \iff (f(x) - f(y)) \\ &\in M(R') \\ &\iff S(f) (x - y) \in M(R') \iff (x - y) \in S(f)^{-1} (M(R')). \end{aligned}$$

Proposition 4.10 : Soient H une partie de M et T une congruence simplifiante sur M . On a :

$$M \left(O_H^T \right) = (M(T) : \lambda(H))$$

En effet :

$$\begin{aligned} (a - b) \in M(O_H^T) &\iff a O_H^T b \iff (\forall x \in H) [(ax) T (bx)] \\ &\iff (\forall x \in H) [(ax - bx) \in M(T)] \iff (\forall x \in H) [(a - b) \lambda(x) \in M(T)] \\ &\iff (a - b) \in (M(T) : \lambda(H)) \end{aligned}$$

Corollaire 1 : $M \left(O_M^T \right) = (M(T) : S(M))$

Corollaire 2 : $M \left(O_M^Z \right) = (0 : S(M))$

Corollaire 3 : $M \left(O_x^T \right) = (M(T) : \lambda(x))$

$$M \left(O_x^Z \right) = (0 : \lambda(x))$$

Proposition 4.10. : Soient P une partie de $M \times M$ et T une congruence sur M . Si on désigne par

$$S(P) = \left\{ (x - y) \mid (x, y) \in P \right\} \quad \text{on a :}$$

$$M(O_P^T) = (M(T) : S(P))$$

En effet :

$$(a - b) \in M(O_P^T) \Leftrightarrow a O_P^T b \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in P) [(ax + by) T (ay + bx)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall (x - y) \in S(P)) [(a - b)(x - y) \in M(T)] \Leftrightarrow (a - b) \in (M(T) : S(P))$$

Corollaire 1 : Si R et T sont deux congruences simplifiantes sur M
on a :

$$M(O_R^T) = (M(T) : M(R)).$$

$$\underline{\text{Corollaire 2 :}} M(O_x^y) = M(O_{(x, y)}^{Z_M}) = (O : (x - y))$$

$$\underline{\text{Corollaire 3 :}} M(O_R^{Z_M}) = (O : M(R)).$$

§5-Ordre canonique sur $S(A)$

Soient A un demi-anneau, $\bar{A}$ le semi-anneau quotient de A par Z_A et $S(A)$ le modelisé de A . On peut définir sur $S(A)$ un préordre naturel que nous qualifions de canonique :

$$(a - b) \leq (a' - b') \iff (\exists c \in A) ; [(a - b) + \theta(c) = (a' - b')]$$

c'est un préordre sur $S(A)$ compatible avec l'addition et la multiplication, en effet :

$$- (a - b) \leq (a - b) \text{ car } (a - b) + \theta(C) = (a - b) \text{ pour tout } C \in Z(A) \text{ car } \theta(C) = 0$$

$$- (a - b) \leq (a' - b') \Rightarrow (\exists (C, C') \in A \times A) ; [(a - b) + \theta(C) = (a' - b')]$$

$$\text{et } (a' - b') + \theta(C') = (a'' - b'') \Rightarrow (\exists C'' = (C + C') \in A) [(a - b) + \theta(C'') = (a'' - b'')]$$

$$- (a - b) \leq (a' - b') \Rightarrow (\exists C \in A) [(a - b) + \theta(C) = (a' - b')]$$

$$\Rightarrow (\forall (s - t) \in S(A)) (\exists C \in A) [(a - b) + (s - t) + \theta(C) = (a' - b') + (s - t)]$$

$$\Rightarrow (\forall (s - t) \in S(A)) [(a - b) + (s - t) \leq (a' - b') + (s - t)]$$

$$- (a - b) \geq 0 \iff (a - b) \in \theta(A)$$

$$(a - b) \geq 0 \iff (\exists C \in A) ; [(a - b) = \theta(C) + 0 = \theta(C)]$$

$$\iff (a - b) \in \theta(A)$$

$$- (a - b) \leq (a' - b') \Rightarrow (\exists C \in A) [(a - b) + \theta(C) = (a' - b')]$$

$$\Rightarrow (\forall d \in A) (\exists C' = C + d \in A) ; [\theta(d) (a - b) + \theta(C') = \theta(d) (a' - b')]$$

$$\Rightarrow (\forall d \in A) [\theta(d) (a - b) \leq \theta(d) (a' - b')]$$

Ce préordre peut-être défini d'une façon naturelle à partir de A et ceci fera intervenir une notion que nous avons étudié dans notre thèse de 3ème cycle. Cette notion est celle d'idéaux additifs.

Définition 5.1. On dira qu'une partie N d'un A -demi-module M est un idéal additif de M si et seulement si N vérifie :

$$- (\forall x \in N) (\forall a \in A) [ax \in N]$$

$$- (\forall x \in N) (\forall y \in M) [(x + y) \in N]$$

On va considérer $\bar{A}$. C'est un $\mathbb{N}$ - semimodule. On va considérer les idéaux additifs principaux de $\bar{A}$ ce sont les $\bar{a} + \bar{A}$ où $\bar{a}$ est la classe de a modulo Z_A . $\bar{A}$ se plonge de $S(A)$. Considérons la restriction sur $\bar{A}$ du préordre défini sur $S(A)$. Nous avons :

$$\bar{a} \leq \bar{b} \iff (\exists c \in A) [\bar{a} + \bar{c} = \bar{b}]$$

Proposition 51: $\bar{a} \leq \bar{b} \iff \bar{a} + \bar{A} \supseteq \bar{b} + \bar{A}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [\bar{a} \leq \bar{b} \Rightarrow (\exists \bar{c} \in \bar{A}) : [\bar{a} + \bar{c} = \bar{b}]] &\Rightarrow [\bar{b} \in \bar{a} + \bar{A}] \Rightarrow [\bar{b} + \bar{A} \subseteq \bar{a} + \bar{A}] \\ \Leftarrow [\bar{a} + \bar{A} \supseteq \bar{b} + \bar{A}] &\Rightarrow [\bar{b} \in \bar{a} + \bar{A}] \Rightarrow (\exists \bar{c} \in \bar{A}) : [\bar{a} + \bar{c} = \bar{b}] \Rightarrow \bar{a} \leq \bar{b} \end{aligned}$$

De l'autre côté le préordre défini sur $S(A)$ est engendré par ce préordre naturel. D'une façon plus précise :

Proposition 52: $(a - b) \leq (a' - b') \iff (\bar{a} + \bar{b}') \leq (\bar{a}' + \bar{b})$

$$(a - b) \leq (a' - b') \iff (\exists c \in A) : [(a - b) + \theta(c) = (a' - b')]$$

$$(\exists c \in A) [\theta(a + c) - \theta(b) = \theta(a') - \theta(b')] \iff (\exists c \in A)$$

$$(\exists t \in A) : [a + c + b' + t = a' + b + t] \iff (\exists \bar{c} \in \bar{A}) ;$$

$$[\bar{a} + \bar{b}' + \bar{c} = \bar{a}' + \bar{b}] \iff (\bar{a} + \bar{b}') \leq (\bar{a}' + \bar{b})$$

Un autre aspect de ce préordre canonique sur $S(A)$ est de réduire la recherche des semianneaux qui engendrent un anneau donné à celle des préordres compatibles avec l'addition et la multiplication sur A qui sont filtrants à droite. En effet :

Proposition 53: Le préordre canonique sur $S(A)$ est filtrant à droite et à gauche. Soient $(a - b)$ et $(a' - b')$ deux éléments de $S(A)$. On a :

$$\begin{aligned} (a - b) \leq \theta(a + a') \text{ car on a : } (a - b) + \theta(b + a') &= \theta(a) - \theta(b) + \theta(b) \\ + \theta(a') &= \theta(a) + \theta(a') = \theta(a + a'). \end{aligned}$$

De la même manière on prouve : $(a' - b') \leq \theta(a + a')$.

De l'autre côté :

$$\begin{aligned} (a - b) \leq -\theta(b + b') \text{ car on a : } -\theta(b + b') + \theta(b' + a) &= \theta(a) + \theta(b') \\ -\theta(b) - \theta(b') &= \theta(a) - \theta(b) = (a - b). \end{aligned}$$

On prouve de la même manière :

On prouve de la même manière : $(a' - b') \leq 0 (b + b')$.

Proposition 5.4 : Réciproquement si A est un anneau muni d'un préordre filtrant à droite et compatible avec l'addition et la multiplication et si $A^+ = \{ a \in A ; a \geq 0 \}$, A^+ est un semi-anneau tel que A soit égal à son modelisé $S(A^+)$.

que A^+ est un semi-anneau, c'est évident. Montrons que $A = S(A^+)$. Il suffit de pouvoir écrire tout $a \in A$ comme la différence de deux éléments de A^+ .

Considérons a et 0 . Le préordre étant filtrant à droite, il existe un $b \in A$ tel que : $b \geq 0$ et $b \geq a$ c.à.d. tel que $b \in A^+$ et $(b - a) \in A^+$. Mais on a :

$$a = b - (b - a). \text{ c.q.f.d.}$$

Remarque : Nous avons fait dès le début l'hypothèse que les zéroïdes des demi-anneaux que nous utiliserons sont non vides. Cette hypothèse peut être supprimée dans ce paragraphe. Dans ce cas le préordre canonique sur $S(A)$ devient un ordre et les résultats sont toujours valables.

CHAPITRE IV

Radical de Jacobson d'un demi-anneau

Demi-anneaux artiniens

1 - Définitions fondamentales

Soit A un demi-anneau qui n'est pas forcément unitaire.

Définition 1.1. : On appelle représentation de A tout homomorphisme de A dans le demi-anneau d'endomorphismes d'un demi-groupe abélien additif M. La représentation sera dite fidèle (resp. exacte) si et seulement si cet homomorphisme est injectif (resp. exact à gauche).

soit $u : a \longmapsto \tilde{a}$ une représentation de A dans le demi-anneau d'endomorphismes d'une demi-groupe abélien additif M. On peut, à l'aide de u, munir M d'une structure de A-demi-module à gauche en posant, pour tout $x \in M$ et tout $a \in A$, $a.x = u(a).(x)$. Il est facile de vérifier que M, muni de son addition et de cette loi externe, est un A- demi-module à gauche.

Réciproquement, soit M un A-demi-module à gauche. La donnée de cette structure sur M définit une représentation de A. En effet, soit, pour tout $a \in A$, u_a l'application de M dans M qui à $x \in M$ fait correspondre $a.x \in M$. u_a est un endomorphisme du demi groupe additif M. On définit, ainsi, une application u de A dans End (M), le demi anneau d'endomorphismes du demi-groupe additif abélien M. u est une représentation. En effet,

$$\begin{aligned} - (\forall (a, b) \in A \times A) (\forall x \in M) [u_{a+b}(x) &= (a+b)(x) = ax + bx = u_a(x) + u_b(x) \\ &= (u_a + u_b)(x)] \Rightarrow [u_{a+b} = u_a + u_b] \\ - (\forall (a, b) \in A \times A) (\forall x \in M) [u_{ab}(x) &= (ab)x = a(bx) = (u_a \circ u_b)(x)] \\ &\Rightarrow [u_{ab} = u_a \circ u_b]. \end{aligned}$$

Il en résulte que : se donner une représentation de A est équivalent à se donner un A-demi-module à gauche.

Définition 1.2. : On dira qu'un A- demi module M est fidèle (resp. exact) si, et seulement si la représentation définie par M est fidèle (resp. exacte).

Définition 1.3. : On appelle noyau (resp. Noyau exact) d'une représentation $u : A \longrightarrow \text{end}(M)$ la congruence R_u (resp. $u^{-1}(Z_{\text{End}(M)})$), on appelle noyau (resp. noyau exact) d'un A- demi module, le noyau (resp. le noyau exact) de la représentation définie par cet A- demi module.

Notons pour le moment N_M et E_M respectivement le noyau et le noyau exact du A- demi module M.

Proposition 1.1. : $N_M = O_M$ et $E_M = O_M^{Z_M}$.

En effet, soient a et b deux éléments de A. Nous avons :

$$\begin{aligned} -[a N_M b] &\Leftrightarrow (\forall x \in M) [ax = bx] \Leftrightarrow [a O_M b] \\ -[a E_M b] &\Leftrightarrow (\forall x \in M) [(ax) Z_M (bx)] \Leftrightarrow [a O_M^{Z_M} b] \end{aligned}$$

Corollaire : M est exact si et seulement si $S(M)$ est fidèle.

En effet : le corollaire 2 de la proposition (4.10) du chapitre III nous donne : $M(O_M^{Z_M}) = (O : S(M)) M$ est, donc, exact si, et seulement si $O_M^{Z_M} = Z_A$ c.à.d. si et seulement si $(O : S(M)) = \{0\}$ ce qui exprime la fidélité de $S(M)$.

Proposition 1.2. : $E_M = N_{M/Z_M}$

En effet, désignons, pour tout $x \in M$, par $\bar{x}$ sa classe modulo Z_M . On a :

$$\begin{aligned} [a E_M b] &\Leftrightarrow (\forall x \in M) [(ax) Z_M (bx)] \Leftrightarrow (\forall x \in M) [\bar{a} x = bx] \\ &\Leftrightarrow (\forall \bar{x} \in M/Z_M) [a \bar{x} = b\bar{x}] \Leftrightarrow [a N_{M/Z_M} b] . \end{aligned}$$

Définition 1.4. : Un A- demi module M sera dit irréductible si, et seulement si M satisfait aux deux conditions suivantes :

- (i) - $A.M \not\subset Z(M)$
- (ii) - Les seules congruences simplifiantes sur M sont Z_M et l'amorphe.

Définition 1.5. : On dira qu'un demi-anneau A est primitif (resp. exact) si, et seulement s'il existe un A- demi module irréductible et fidèle (resp. exact).

Proposition 1.3. : M est irréductible si et seulement si M/Z_M est irréductible.

D'après la proposition (2.1.3.) du chapitre I, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des congruences simplifiantes sur M/Z_M et celui des congruences simplifiantes sur M . Donc, si M n'admet pas de congruences simplifiantes autre que l'amorphe et Z_M , il en est de même pour M/Z_M et réciproquement.

De l'autre côté :

$$\begin{aligned} A.M \not\subseteq Z(M) &\Leftrightarrow (\exists a \in A) (\exists x \in M) [ax \notin Z(M)] \Leftrightarrow (\exists a \in A) \\ &(\exists \bar{x} \in M/Z_M) [a\bar{x} \neq 0] \Leftrightarrow (\exists a \in A) (\exists \bar{x} \in M/Z_M) [a\bar{x} \notin Z(M/Z_M)] \\ &\Leftrightarrow A.M/Z_M \neq \{0\} = Z(M/Z_M). \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition :

Proposition 1.4. : M est irréductible si, et seulement si $S(M)$ est irréductible.

On doit démontrer les deux équivalences suivantes :

$$- A.M \not\subseteq Z(M) \Leftrightarrow S(A) \quad S(M) \neq \{0\}$$

- M n'admet pas de congruences simplifiantes autre que l'amorphe et Z_M si, et seulement si $S(M)$ n'admet pas de sous-modules autre que $S(M)$ et $\{0\}$.

La seconde équivalence est immédiate grâce à la bijection entre l'ensemble de sous-modules de $S(M)$ et celui des congruences simplifiantes sur M . Quant à la première nous avons :

$$\begin{aligned} A.M \not\subseteq Z(M) &\Rightarrow (\exists a \in A) (\exists x \in M) [ax \notin Z(M)] \Rightarrow (\exists \theta(a) \in S(A)) \\ &(\exists \lambda(x) \in S(M)) [\theta(a)\lambda(x) = \lambda(ax) \neq 0] \Rightarrow S(A) \quad S(M) \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Réciproquement supposons avoir : $S(A) \quad S(M) \neq \{0\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} A.M \subseteq Z(M) &\Rightarrow (\forall a \in A) (\forall x \in M) [ax \in Z(M)] \Rightarrow (\forall \theta(a) \in S(A)) \\ &(\forall \lambda(x) \in S(M)) [\theta(a)\lambda(x) = \lambda(ax) = 0] \Rightarrow (\forall (a-b) \in S(A)) \end{aligned}$$

$$(\forall (x - y) \in S(M)) [(a - b)(x - y) = (ax + by) - (ay + bx) = (\lambda(ax) + \lambda(by)) - (\lambda(ay) + \lambda(bx)) = 0] \Rightarrow S(A) \cdot S(M) = \{0\}.$$

Donc, si $S(A) \cdot S(M) \neq \{0\}$, A.M. ne peut pas être dans $Z(M)$.

Définition 1.6. : Une congruence bilatère R sur A sera dite primitive (resp. exacte) si, et seulement si le demi anneau A/R est primitif (resp. exact).

Proposition 1.5. : Une congruence (resp. congruence simplifiante) bilatère R sur A est primitive (resp. exacte) si, et seulement s'il existe un A- demi-module irréductible M tel que $R = 0_M$ (resp. $R = E_M$).

En effet, si R est primitive, A/R sera primitif et il existe un A/R - demi-module fidèle et irréductible M . Or M peut être considéré comme un A- demi module en posant $a.x = \bar{a} . x$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } [a \ 0_M \ b] &\Leftrightarrow (\forall x \in M) [ax = bx] \Leftrightarrow (\forall x \in M) [\bar{a} . x = \bar{b} . x] \\ &\Leftrightarrow [\bar{a} = \bar{b}] \text{ car } M \text{ est un } A/R \text{ - demi module fidèle} \Leftrightarrow [a \ R \ b]. \end{aligned}$$

On a donc $0_M = R$. D'autre part, M étant un A/R - demi-module irréductible, il est aussi un A-demi-module irréductible (proposition (3.12) du chapitre I).

Réciproquement, si M est un A-demi module irréductible tel que $0_M = R$, M peut être muni d'une structure de A/R - demi-module et est irréductible pour cette structure (proposition (3.9) du chapitre I). De plus M est fidèle pour cette structure.

Pour l'autre cas nous avons ; si R est une congruence bilatère simplifiante et exacte. On peut trouver, comme dans le premier cas, un A- demi-module M irréductible en tant que A/R -demi-module tel que $R = E_M$; Prouvons que M est irréductible en tant que A- demi-module. En effet, M étant irréductible en tant que A/R - demi-module , M/Z_M l'est aussi en tant que A/R - demi-module, de plus on a : $R = E_M = 0_{M/Z_M}$, ceci nous permet de conclure que M/Z_M , et par suite M , est irréductible en tant que A- demi-module.

Réciproquement, s'il existe un A- demi-module M irréductible et tel que $R = E_M$, il existe, alors, un A-demi-module M/Z_M irréductible tel que $R = E_M = O_{M/Z_M}$. M/Z_M peut-être alors, muni d'une structure de A/R-demi-module irréductible. Il en est de même pour M. De plus, M/Z_M est fidèle, donc M est exact.

Proposition 1.6. : A est exact si, et seulement si $S(A)$ est primitif.

En effet, A est exact si et seulement s'il existe un A demi-module irréductible exact c.à.d. si et seulement s'il existe un $S(A)$ - module irréductible et fidèle (proposition (1.4.) et corollaire de la proposition (1.1.) ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que $S(A)$ soit primitif.

Corollaire : Soit R une congruence bilatère et simplifiante R est exacte si et seulement si $M(R)$ est un idéal bilatère primitif.

Ceci repose sur le fait que $S(A/R)$ est isomorphe à $S(A)/M(R)$.

Soit $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}'$) la classe des A-demi-modules irréductibles (resp. A-semi-modules irréductibles).

Définition 1.7. : On appelle radical de Jacobson de A (resp. D-radical de Jacobson de A) et on note $R(A)$ (resp. $R_D(A)$) l'intersection des E_M (resp. O_M) pour M parcourant $\mathcal{M}$.

Proposition 1.7. : $R(A) = \bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} O_{M'}$

En effet, nous avons :

$(\forall M \in \mathcal{M}) (\exists M' \in \mathcal{M}') [O_{M'} = E_M]$. Il suffit de prendre $M' = M/Z_M \Rightarrow R(A) \subseteq \bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} O_{M'}$

Réciproquement, tout $M' \in \mathcal{M}'$ est un $M' \in \mathcal{M}$ et on a :

$$E_{M'} = O_{M'/Z_{M'}} = O_{M'} \quad \text{d'où} \quad \bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} O_{M'} \subseteq R(A)$$

Il en résulte l'égalité

Corollaire : $R_D(A) \subseteq R(A)$.

Proposition 1.8. : $R_D(A)$ (resp. $R(A)$) est l'intersection des congruences bilatères (resp. Congruences simplifiantes bilatères) primitives (resp. exacts) sur A .

C'est une conséquence de la proposition (1.5.)

Proposition 1.9. : $M(R(A)) = R(S(A))$.

On a :

$$\begin{aligned} M(R(A)) &= M\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} E_M\right) = M\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} O_M^{Z_M}\right) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M(O_M^{Z_M}) \\ &= \bigcap_{M \in \mathcal{M}} (O : S(M)) = R(S(A)). \end{aligned}$$

car lorsque M parcourt $\mathcal{M}$, $S(M)$ parcourt la classe des $S(A)$ - modules irréductibles. En effet, pour tout $M \in \mathcal{M}$, $S(M)$ est un $S(A)$ - module irréductible. Réciproquement tout $S(A)$ - module irréductible est un A -demi-module irréductible.

Définition 1.8. : On dira qu'un demi-anneau A est semi-simple (resp. D -semi-simple) si, et seulement si $R(A) = Z_A$ (resp. $R_D(A)$ est l'égalité).

Proposition 1.10. : $A/R(A)$ (resp. $A/R_D(A)$) est semi-simple (resp. D - semi simple).

Il faut remarquer que $R(A)$ (resp. $R_D(A)$) est une congruence bilatère (proposition 13.2) du chapitre I).

Pour tout $M' \in \mathcal{M}'$ (resp. $M \in \mathcal{M}$) $R(A) \subseteq O_{M'}$ (resp. $R_D(A) \subseteq O_M$)

On peut donc, munir M' (resp. M) d'une structure de $A/R(A)$ - demi-module (resp. $A/R_D(A)$ - demi module). M' (resp. M) reste irréductible pour cette structure (voir 3 du chapitre I). Réciproquement, si M' (resp. M) est un $A/R(A)$ - semi-module (resp. $A/R_D(A)$ - demi module) irréductible. On peut le considérer comme un A -semi-module irréductible (A - demi-module irréductible), et on a :

$R(A) \subseteq O_M$, (resp. $R_D(A) \subseteq O_M$). D'où :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} \bar{a} & R(A/R(A)) \\ \bar{b} \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} \bar{a} & O_M \\ \bar{b} \end{array} \right] \text{ pour tout } A/R(A) \text{ - semi module irréductible} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} a & O_M \\ b \end{array} \right] \text{ pour tout } M' \in \mathcal{M}' \text{ (proposition (3.10) du} \\ &\quad \text{chapitre I).} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} a & R(A) \\ b \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} \bar{a} & = \bar{b} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} \bar{a} & Z_{A/R(A)} \\ \bar{b} \end{array} \right]$$

Le même raisonnement prouve que $R_D(A/R_D(A))$ est l'égalité.

Remarque : On peut introduire d'autres notions de radical sur un demi-anneau A. On peut définir tout d'abord la notion de A- demi-module semi-irréductible. Un tel A demi-module M doit vérifier :

(i) - $A.M \not\subseteq Z(M)$

(ii) - Les seuls sous-demi modules fortement clos de M sont M et $Z(M)$.

D'ailleurs, un A- demi-module irréductible est un A- demi-module semi-irréductible. On introduit alors la notion de semi-radical (resp. D- semi-radical) comme étant l'intersection des E_M (resp. O_M) où M parcourt la classe des A- demi-modules semi-irréductibles. On notera $\Sigma(A)$ (resp. $\Sigma_D(A)$) le semi-radical (resp. le D- semi-radical) de A. On a les relations suivantes :

$$\Sigma(A) \subseteq R(A) \text{ et } \Sigma_D(A) \subseteq \Sigma(A) \cap R_D(A) \subseteq R(A).$$

Dans la suite on va approfondir l'étude de $R(A)$ laissant les autres notions à une étude ultérieure.

2 - Etude du radical de Jacobson de A :

A est toujours un demi-anneaux quelconque :

1 - Congruences Modulaires ;

Définition 2.1. : On dira qu'une congruence à gauche R sur A est

est modulaire si, et seulement s'il existe $(e_1, e_2) \in A \times A$ tel que l'on a, pour tout $(a, b) \in A \times A$, :

$$(a + ae_2 + be_1)R(b + be_2 + ae_1)$$

Proposition 2.1. : Soit R une congruence à gauche simplifiante sur A. R est modulaire $\Leftrightarrow$ l'idéal à gauche M(R) de S(A) est modulaire.

En effet :

$$R \text{ est modulaire } \Leftrightarrow (\exists (e_1, e_2) \in A \times A) (\forall (a, b) \in A \times A)$$

$$[(a + ae_2 + be_1)R(b + be_2 + ae_1)] \Leftrightarrow (\exists (e_1 - e_2) \in S(A)) ;$$

$$(\forall (a - b) \in S(A)) [((a - b) - (a - b)(e_1 - e_2)) \in M(R)] \Leftrightarrow \text{l'idéal à gauche } M(R) \text{ de } S(A) \text{ est modulaire.}$$

Proposition 2.2 : Soient R et R' deux congruences à gauche sur A telles que $R \subseteq R'$. Si R est modulaire, R' l'est aussi.

Car si R est modulaire, il existe $(e_1, e_2) \in A \times A$ tel que, pour tout $(a, b) \in A \times A$, l'on a : $(a + ae_2 + be_1)R(b + be_2 + ae_1)$.

Mais ceci implique : $(a + ae_2 + be_1)R'(b + be_2 + ae_1)$ pour tout $(a, b) \in A \times A$. Il en résulte que R' est modulaire.

Proposition 2.3. : Soit R une congruence à gauche simplifiante et modulaire. Si on a : $e_1 R e_2$, R est amorphe.

En effet, car $e_1 R e_2$ équivaut à ce que $(e_1 - e_2)$ soit dans M(R). M(R) est alors S(A) tout entier, donc R est amorphe.

Proposition 2.4. : Soit R une congruence à gauche simplifiante et modulaire. On a : $O_A^R \subseteq R$.

On a : $M(O_A^R) = (M(R) ; S(A))$ d'après la proposition (4.10)

Corollaire 1, du chapitre III. Donc si R est modulaire, M(R) le sera aussi et on aura : $(M(R) : S(A)) \subseteq M(R)$ c.à.d. $M(O_A^R) \subseteq M(R)$ d'où $O_A^R \subseteq R$.

Proposition 2.5. : Toute congruence à gauche simplifiante et modulaire, se plonge dans une congruence à gauche simplifiante et modulaire maximale.

Ceci découle immédiatement de la propriété analogue pour les anneaux.

Corollaire 1 : Soit R une congruence à gauche simplifiante sur A . R est modulaire maximale, si, et seulement si $M(R)$ est modulaire maximal.

Corollaire 2 : $R(A)$ est l'intersection des congruences à gauche simplifiante et modulaire maximales.

En effet, $R(S(A))$ est l'intersection des idéaux à gauche modulaires maximaux, il en résulte que $M(R(A))$ est l'intersection des $M(R)$ où R parcourt l'ensemble des congruences à gauche simplifiantes et modulaires maximales d'où notre proposition.

Proposition 2.6. : Soit R une congruence à gauche simplifiante sur A , R est modulaire maximale si et seulement si A/R est un A -semi-module irréductible.

En effet, R est modulaire maximale si, et seulement si $M(R)$ est modulaire maximal c.à.d. si, et seulement si $S(A)/_{M(R)} \cong (A/R)$ est un $S(A)$ -module irréductible, ce qui équivaut à ce que A/R soit un A -semi-module irréductible.

2 - Caractérisation des A -demi modules irréductibles :

Soit M un A -demi-module.

Proposition 2.7 : M est irréductible si, et seulement si $M \neq Z(M)$ et si, pour tout $(x, y) \in M \times M$ vérifiant $x \not\equiv_M y$, R_x^y est amorphe.

Nous avons :

M est irréductible si, et seulement si, $S(M)$ l'est c.à.d. si, et seulement si $S(M) \neq \{0\}$ et pour tout $(x - y) \neq 0$ dans $S(M)$, $S(M) = S(A)(x - y)$ ce qui est équivalent à : $M \neq Z_M$ et pour tout $(x, y) \in M \times M$ vérifiant $x \not\equiv_M y$,

R_x^y est amorphe car $M(R_x^y) = S(A) \ (x \sim y)$. D'après le corollaire 2 de la proposition (4.6;) du chapitre III.

Considérons le centralisateur K de $S(M)$ qui est un corps.

Définition 2.2 : On dira qu'une famille de couples $(x_i, y_i)_{i=1,2,\dots,n}$ de $M \times M$ est K - linéairement indépendants si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^n \ell_i (\lambda(x_i)) = \sum_{i=1}^n \ell_i (\lambda(y_i)) \text{ où les } (\ell_i) \text{ sont dans } K, \text{ on a alors : } \ell_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Proposition 2.8. : $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ sont K - linéairement indépendants si et seulement si $(x_i - y_i)_{i=1,\dots,n}$ sont linéairement indépendants sur K .

c'est évident.

Proposition 2.9. : Soient (x_i, y_i) n couples K - linéairement indépendants et $(u_i, v_i)_{i=1,\dots,n}$ n couples quelconques dans $M \times M$. Il existe $(a - b) \in S(A)$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, :

$$(ax_i + by_i + v_i) Z_A (ay_i + bx_i + u_i)$$

En effet :

les $(x_i ; y_i)_{i=1,\dots,n}$ étant K - linéairement indépendants , les

$(x_i - y_i)_{i=1,\dots,n}$ sont linéairement indépendants sur K . D'après le

théorème de densité pour les anneaux [10], pour toute famille $(u_i - v_i)_{i=1,\dots,n}$

d'éléments de $S(M)$ il existe $(a - b) \in S(A)$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a :

$$(a - b) (x_i - y_i) = (u_i - v_i). \text{ D'où notre proposition.}$$

3 - Quasi régularité :

Soient A un demi anneau et $(e_1, e_2) \in A \times A$ un couple.

On considère la congruence image par $\mathcal{E}; \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ de l'idéal modulaire formé par les éléments de $S(A)$ de la forme $(c - d) \cdot (c - d) (e_1 - e_2) \cdot Q_{e_1}^{e_2}$. On va noter $Q_{e_1}^{e_2}$ cette congruence. Explicitons $Q_{e_1}^{e_2}$:

$$\left[a \cdot Q_{e_1}^{e_2} b \right] \Leftrightarrow \left[(a - b) \in M(Q_{e_1}^{e_2}) \right] \Leftrightarrow (\exists (c - d) \in S(A)) ;$$

$$[a - b] = [(c - d) - (c - d) (e_1 - e_2)] \Leftrightarrow (\exists (c, d) \in A \times A) (\exists e \in A)$$

$$[a + d + Ce_1 + de_2 + e = b + C + de_1 + Ce_2 + e]$$

$Q_{e_1}^{e_2}$ est en plus modulaire :

Définition 2.2 : On dira qu'un couple $(e_1, e_2) \in A \times A$ est quasi régulier à gauche si, et seulement si $Q_{e_1}^{e_2}$ est amorphe.

On utilisera l'abréviation suivante q.r.g. pour dire quasi régulier à gauche.

Définition 2.3 : On dira qu'une congruence à gauche simplifiante R sur A est quasi régulière (q.r.) si, et seulement si tout $(a, b) \in A \times A$ vérifiant $a R b$ est q.r.g.

Proposition 2.8 : (e_1, e_2) est q.r.g. si, et seulement si $(e_1 - e_2)$ est q.r.g. dans $S(A)$

ceci découle de la définition (2.2.) et de la construction de $Q_{e_1}^{e_2}$.

Corollaire : (e_1, e_2) est q.r.g. si, et seulement si (e_2, e_1) l'est aussi.

Ceci provient du fait que dans un anneau, un élément est q.r.g. si, et seulement si son apposé l'est aussi.

Proposition 2.9. : (e_1, e_2) est q.r.g. si et seulement si l'on a :

$$e_1 \quad Q_{e_1}^{e_2} \quad e_2$$

ceci provient du fait que $(e_1 - e_2)$ est q.r.g. dans $S(A)$ si et seulement si

$$(e_1 - e_2) \in \left\{ (a - b) - (a - b)(e_1 - e_2) \right\}$$

Proposition : 2.10 : (i) - $R(A)$ est quasi-régulière

(ii) - $R(A)$ contient toute congruence à gauche
quasi régulière.

Ceci découle du fait qu'une congruence à gauche (resp. à droite) simplifiante est q.r. si, et seulement si $M(R)$ est q.r.

Proposition 2.11. - $x R(A) y \iff (\forall (a,b) \in A \times A) (\forall (a', b') \in A \times A)$
 $(axb' + a'yb' + ayb + a'xb, axb + a'yb + ayb' + a'xb')$
est q.r.g.

En effet :

$$[xR(A)y] \iff [(x-y) \in R(S(A))] \iff (\forall (a - a') \in S(A)) (\forall (b - b') \in S(A))$$

$$[(a - a')(x - y)(b - b') \text{ est q.r.g.}]$$

$$\iff (axb' + a'yb' + ayb + a'xb, axb + a'yb + ayb' + a'xb') \text{ est q.r.g.}$$

Remarque : On peut rattacher la notion de radical de Jacobson d'un demi anneau définie par Iizuka dans [4] à la notre. Iizuka définit le radical comme étant $\bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} (0 : M')$ où

$$(0 : M') = \left\{ a \in A ; aM' = \{0\} \right\}.$$

Cet idéal n'est autre chose que la classe modulo notre congruence $R(A)$, qui contient $Z(A)$. En effet :

$$(\forall x' \in M') (\forall M' \in \mathcal{M}') \quad (\forall z \in Z(A)) [z.x \in Z(M') = \{0\}]$$

$$\implies (\forall M' \in \mathcal{M}') [z \in (0 : M')] \implies z \in \bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} (0 : M')$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \left[a \in \bigcap_{M' \in \mathcal{M}'} (0 : M') \right] &\Leftrightarrow (\forall M' \in \mathcal{M}') [a \in (0 : M')] \\
 &\Leftrightarrow (\forall M' \in \mathcal{M}') (\forall x' \in M') [ax' = 0 = z x'] \\
 &\Leftrightarrow (\forall M' \in \mathcal{M}') [a \in 0_{M'} \quad z] \\
 &\Leftrightarrow [a \in R(A) \quad z] .
 \end{aligned}$$

3 - Radicaux de quelques demi-anneaux attachés à A :

Soit A un demi-anneau quelconque :

Proposition 3.1. : $R(A/Z_A) = R(A)/Z_A$

Il suffit, en effet, de prouver que $(\bar{a}, \bar{b})$ est q.r.g. si et seulement si (a, b) est q.r.g. et d'appliquer la proposition (2.11)

si $(\bar{a}, \bar{b})$ est q.r.g. il existe $(\bar{c}, \bar{d}) \in A/Z_A \times A/Z_A$ et $\bar{e} \in A/Z_A$ tels que

$\bar{a} + \bar{d} + \bar{c} \bar{a} + \bar{d} \bar{b} + \bar{e} = \bar{b} + \bar{c} + \bar{c} \bar{b} + \bar{d} \bar{a} + \bar{e}$ c.à.d. qu'il existe $(c, d) \in A \times A$ et $e \in A$ tels que : $(a + d + ca + db + e) \in Z_A (b + c + cb + da + e)$

ce qui prouve l'existence d'un $e' \in A$ tel que :

$a + d + ca + db + e + e' = b + c + cb + da + e + e'$ ce qui exprime : $a \in Q_a^b b$ c.à.d. (a, b) est q.r.g.

On démontre facilement que si (a, b) est q.r.g. $(\bar{a}, \bar{b})$ est q.r.g. aussi

Proposition 3.2. : Soit $f; A \longrightarrow A'$ un homomorphisme de A sur un demi-anneau A' . On a $f(R(A)) \subseteq R(A')$.

La proposition (4.8.) du chapitre III nous dit que $M(f(R(A)))$ est identique à $S(f)(M(R(A))) = S(f)(R(S(A)))$. Or $S(f)(R(S(A)))$ est dans $R(S(A')) = M(R(A'))$ car $S(f)$ est surjectif.

On en déduit $M(f(R(A))) \subseteq M(R(A'))$ et par suite $f(R(A)) \subseteq R(A')$.

Corollaire 1 : Si A' est semi-simple, $R(A) \subseteq f^{-1}(Z_{A'})$

Corollaire 2 : Si A' est semi-simple et si f est en plus exact à gauche, A est semi-simple.

Proposition 3.3. : Soit I un idéal bilatère de A tel que l'injection canonique $i : I \longrightarrow A$ soit exacte ^{à gauche}. On a : $R(I)$ est la restriction à I de $R(A)$.

$S(i) (S(I)) = M(R_I)$ est, dans ce cas, un idéal bilatère de $S(A)$.

d'où $R(S(i) (S(I))) = R(S(A)) \cap$

$S(i) (S(I))$ c.à.d. $R(M(R_I)) =$

$M(R(A)) \cap M(R_I) = M(R(A) \cap R_I)$

D'où : pour $(a, b) \in I \times I$.

$$\begin{aligned} [a R(I) b] &\Leftrightarrow [(a - b) \in R(S(I))] \Leftrightarrow [(i(a) - i(b)) \in R(S(i)(S(I)))] \Leftrightarrow \\ &[(i(a) - i(b)) \in R(M(R_I))] \Leftrightarrow [(i(a) - i(b)) \in M(R(A) \cap R_I)] \Leftrightarrow [i(a) R(A) \cap R_I i(b)] \\ &\Leftrightarrow [i(a) R(A) i(b)] \end{aligned}$$

Proposition 3.4. : Soit A_n le demi anneau des amtrices $n \times n$ sur A .

Si $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$ sont deux matrices dans A_n on a :

$$M R(A_n) N \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, n) (\forall j = 1, \dots, n) [m_{ij}, R(A) n_{ij}]$$

Lemme : $S(A_n) \simeq S(A)_n$.

Soit $\theta : A \longrightarrow S(A)$ l'homomorphisme canonique.

On peut définir à l'aide de θ un homomorphisme $\bar{\theta} : A_n \longrightarrow S(A)_n$ qui à

(a_{ij}) fait correspondre $(\theta(a_{ij}))$. On vérifie facilement que $\bar{\theta}$ est un homomorphisme.

Considérons le diagramme suivant.

Il existe un homomorphisme unique $\hat{\theta} : S(A_n) \longrightarrow S(A)_n$ tel que $\hat{\theta} \circ \theta_n = \bar{\theta}$.

Nous allons prouver que $\hat{\theta}$ est un isomorphisme on a :

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\bar{\theta}} & S(A)_n \\ \theta_n \downarrow & \nearrow \hat{\theta} & \\ S(A_n) & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}((a_{ij}) - (b_{ij})) &= \bar{\theta}(a_{ij}) - \bar{\theta}(b_{ij}) = (\theta(a_{ij})) - (\theta(b_{ij})) \\ &= (\theta(a_{ij}) - \theta(b_{ij})) = (a_{ij} - b_{ij}) \end{aligned}$$

D'où la surjectivité de $\hat{\theta}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}((a_{ij}) - (b_{ij})) = 0 &\Rightarrow (a_{ij} - b_{ij}) = 0 \Rightarrow (\forall (i,j)) [(a_{ij} - b_{ij}) = 0] \\ &\Rightarrow (\forall (i,j)) [a_{ij} \sim_A b_{ij}] \Rightarrow (\forall (i,j)) (\exists c_{ij} \in A) ; \\ [a_{ij} + c_{ij} = b_{ij} + c_{ij}] &\Rightarrow (a_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij}) + (c_{ij}) \\ &\Rightarrow (a_{ij}) \sim_{A_n} (b_{ij}) \Rightarrow ((a_{ij}) - (b_{ij})) = 0 \end{aligned}$$

Revenons à notre proposition :

$$M \sim_{R(A_n)} N \Leftrightarrow (M - N) \in M(R(A_n)) = R(S(A_n))$$

$$\Leftrightarrow (M - N) \in R(S(A)_n) \Leftrightarrow (\forall (i,j)) [(m_{ij} - n_{ij}) \in R(S(A))]$$

$$\Leftrightarrow (\forall (i,j)) [m_{ij} \sim_{R(A)} n_{ij}].$$

4 - Structures des demi anneaux semi-simples artiniens à gauche

Soit A un demi-anneau.

Définition 4.1. : On dira que A est artinien à gauche (resp. à droite) si et seulement si toute suite décroissante de congruences à gauche (resp. à droite) simplifiantes sur A est stationnaire.

Proposition 4.1. : A est artinien à gauche (resp. à droite) si, et seulement si S(A) est artinien à gauche (resp. à droite).

Il suffit de remarquer qu'il y a une bijection croissante de l'ensemble des idéaux à gauche (resp. à droite) de S(A) sur celui des congruences à gauche (resp. à droite) simplifiantes.

Définition 4.2. : On dira qu'un couple $(a,b) \in A \times A$ est nilpotent si et seulement si $(a - b)$ est nilpotent dans S(A). On dira qu'une congruence à gauche (resp. à droite, bilatère) simplifiante R sur A est nilpotente (resp. une nilcongruence) si, et seulement si il existe un entier positif n tel que $R^n = Z_A$ (resp. si tout

couple $(a,b) \in A \times A$ vérifiant $a R b$ est nilpotent).

On en déduit que toute congruence à gauche -(resp. à droite, bilatère) simplifiante R sur A nilpotente est une nilcongruence. Car R est nilpotente si et seulement si l'idéal $M(R)$ est nilpotent et R est une nilcongruence si et seulement si $M(R)$ est un nilidéal.

Considérons sur A la relation suivante :

$$a N(A) b \iff (a,b) \text{ est nilpotent}$$

On voit immédiatement que si $N(S(A))$ est le nilradical de $S(A)$,
on a :

$$a N(A) b \iff (a - b) \in N(S(A)).$$

$N(A)$ est donc une congruence bilatère simplifiante.

C'est une nilcongruence, même la plus grande nilcongruence simplifiante.

Proposition 4..2. : $N(A)$ est quasi-régulière en tant que congruence à gauche simplifiante.

Il suffit de prouver que tout couple $(a,b) \in A \times A$ nilpotent est quasi-régulier à gauche. Ceci découle de la même propriété dans les anneaux car (a,b) est nilpotent (resp. q.r.g;) si et seulement si $(a - b)$ est nilpotent (resp. q.r.g.)

Proposition 4.3. : Si A est arténien à gauche, $R(A)$ est nilpotente.

Ceci découle de la proposition (4.1) et de la propriété analogue pour les anneaux.

Corollaire : $R(A) = N(A)$.

Proposition 4.4. : Si A est artinien à gauche, $R(A)$ contient toute nilcongruence unilatérale simplifiante.

Même raisonnement.

Corollaire : Si A est artinien à gauche, toute nilcongruence unilatérale simplifiante est nilpotente.

Ceci découle des propositions (4.2) et (4.3).

Soit maintenant R une congruence bilatère simplifiante sur A .

Définition 4.4. : Soit T une relation d'équivalence sur A .

On dira que T est une R-congruence à gauche (resp. à droite) si, et seulement si T vérifie les conditions suivantes :

$$(i) - T \subseteq R$$

$$(ii) - T \text{ vérifie l'axiome } (C'_1)$$

$$(iii) - (\forall (a,b) \in A \times A) (\forall (x,y) \in A \times A)$$

$$[a R b \text{ et } x T y \Rightarrow (ax + by) T (ay + bx)]$$

On dira que T est une R - congruence bilatère si, et seulement si R est à la fois une R-congruence à gauche et à droite.

Soit T une R-congruence à gauche simplifiante.

On peut définir $M(T)$. $M(T)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$- M(T) \subseteq M(R) \text{ puisque on a : } T \subseteq R$$

$$- M(T) \text{ est un sous-groupe additif de } S(A) \text{ grâce à } (C'_1).$$

$$- (\forall (a - b) \in M(R)) (\forall (x - y) \in M(T)) [(a - b)(x - y) \in M(T)]$$

$M(T)$ est donc un idéal à gauche de $M(R)$ considéré comme anneau.

Réciproquement, si I est un idéal à gauche de $M(R)$ on peut définir $C(I)$ et on obtient une R-congruence à gauche. D'où la proposition suivante :

Proposition 4.5. : T est une R - congruence à gauche (resp. à droite, bilatère) simplifiante si, et seulement si $M(T)$ est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de $M(R)$ considéré comme un anneau.

Définition 4.4. : On dira qu'une congruence bilatère simplifiante R sur A est simple si et seulement si les seules R - congruences bilatères simplifiantes sont R et Z_A . On dira que A est simple si et seulement si la congruence amorphe sur A est simple.

Proposition 4.6. : Soit R une congruence bilatère simplifiante sur A . R est simple, si et seulement si $M(R)$ est simple en tant qu'anneau.

Ceci est une conséquence de la proposition (4.4)

Proposition 4.7. : Si R est une congruence bilatère simplifiante et simple sur A , R est une congruence bilatère simplifiante minimale.

Il suffit de prouver que si T est une congruence bilatère simplifiante sur A contenue dans R , T est une R -congruence bilatère simplifiante. En effet,

$$\begin{aligned} & (\forall (a,b) \in A \times A) (\forall (x,y) \in A \times A) [a R b \text{ et } x T y \Rightarrow (ax + by) R T (ay + bx)] \\ \Rightarrow & (\forall (a,b) \in A \times A) (\forall (x,y) \in A \times A) [a R b \text{ et } x T y \Rightarrow (ax + by) T (ay + bx)] \end{aligned}$$

puisque $R T$ est dans T (Proposition (1.4.2.) du chapitre I).

Proposition 4.8. : A est simple si et seulement si $\theta(A)$, où $\theta : A \longrightarrow S(A)$ est l'homomorphisme canonique, est un semi-anneau de matrices carrées d'un certain ordre sur un corps, générateur ⁽¹⁾ de l'anneau complet des matrices carrées du même ordre sur le même corps. ⁽²⁾

A est simple si et seulement si $S(A)$ est simple c.à.d. si et seulement si $S(A)$ est l'anneau complet des matrices carrées d'un certain ordre n sur un corps K . D'où, pour tout $a \in A$, $\theta(a)$ est identifié à une matrice $n \times n$ sur K .

Leur ensemble est un semi-anneau générateur de $S(A)$.

Réciproquement, si $\theta(A)$ est un semi-anneau de matrices $n \times n$ sur un corps K générateur de l'anneau complet des matrices $n \times n$ sur K , $S(A)$, qui est l'anneau engendré par $\theta(A)$, est donc identique à l'anneau complet des matrices $n \times n$ sur K . C'est donc un anneau simple, et A est, par suite, un demi-anneau simple.

⁽¹⁾ - Dans le sens de la construction de $S(A)$.

⁽²⁾ - Voir § 5 du chapitre III.

Proposition 4.9. : Un demi anneau A est semi-simple et artinien à gauche si, et seulement s'il existe une famille finie $(R_i)_{i \in I}$ de congruences bilatères simplifiantes sur A telle que :

$$(i) - \bigcup_{i \in I} R_i \text{ soit amorphe}$$

$$(ii) - (\forall i \in I) [R_i \cap (\bigcup_{j \neq i} R_j) = Z_A]$$

$$(iii) - (\forall i \in I) [R_i \text{ est simple}].$$

On utilise ici le théorème de Wedderburn - Artin.

A est semi-simple et artinien à gauche si, et seulement si $S(A)$ est semi-simple et artinien à gauche. D'après le théorème cité, A est la somme directe d'une famille finie d'idéaux bilatères, tous simples en tant qu'anneaux. Or chaque idéal est de la forme $M(R_i)$ où R_i est une congruence bilatère simplifiante sur A. A est, donc, semi-simple et artinien à gauche si et seulement s'il existe une famille finie $(R_i)_{i \in I}$ de congruences bilatères simplifiantes telle que :

$$- S(A) = \bigoplus_{i \in I} M(R_i)$$

$$- (\forall i \in I) [M(R_i) \text{ soit simple en tant qu'anneau}]$$

Or ceci est équivalent à :

$$(i) - S(A) = \sum_{i \in I} M(R_i) \Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} R_i \text{ soit amorphe}$$

$$(ii) - (\forall i \in I) [M(R_i) \cap \sum_{j \neq i} M(R_j) = \{0\}] \Leftrightarrow (\forall i \in I) [R_i \cap \bigcup_{j \neq i} R_j = Z_A]$$

$$(iii) - (\forall i \in I) [M(R_i) \text{ est simple}] \Leftrightarrow (\forall i \in I) [R_i \text{ est simple}].$$

Corollaire : Si A est semi-simple et artinien à gauche, il existe une famille finie $(R_i)_{i \in I}$ de congruences bilatères simplifiantes minimales telle que :

- $\bigcup_{i \in I} R_i$ soit amorphe.

- $(\forall i \in I) [R_i \cap \bigcup_{j \neq i} R_j = Z_A]$.

C'est une conséquence des propositions (4.5) et (4.7)

Proposition 4.10. : Si A est semi-simple et artinien à gauche, une telle famille est unique.

Ceci découle de la propriété analogue pour les anneaux

5 - Idempotents sur un demi-anneau.

Soit A un demi-anneau unitaire.

Définition 5.1. : On dira qu'un couple $(e, e') \in A \times A$ est idempotent si et seulement si $(e - e')$ est idempotent dans $S(A)$.

(e, e') est donc un idempotent si et seulement si

$$(e^2 + e'^2 + e') Z_A (e e' + e' e + e)$$

Proposition 5.1. : Si (e, e') est un idempotent, le couple $(1 + e', e)$ est aussi idempotent.

En effet, si (e, e') est un idempotent, $(e - e')$ est un idempotent dans $S(A)$, donc $\theta(1) - (e - e')$ aussi. Mais ce dernier élément n'est autre chose que $((1 + e') - e)$. Il en résulte que $(1 + e', e)$ est idempotent.

Proposition 5.2. : Si (e, e') est idempotent on a :

$$(i) - R_e^{e'} \cap R_{(1 + e')}^e = Z_A$$

$$(ii) - R_e^{e'} \bigcup R_{(1 + e')}^e = A$$

ceci provient du fait que si $(e - e')$ est idempotent on a : $A = A(e - e') \oplus A((1 + e') - e)$.

Définition 5.2. : On dira que deux couples idempotents (e, e') et (f, f') sont orthogonaux si et seulement si :

$$(ef + e'f') Z_A (ef' + e'f)$$

ceci est équivalent à $(e - e')(f - f') = 0$.

Définition 5.3. : On appelle semi-décomposition de l'unité de A,

toute famille finie $(e_i, e'_i)_{i=1, \dots, n}$

d'idempotents deux à deux orthogonaux tels que :

$$(1 + \sum_{i=1}^n e'_i) Z_A (\sum_{i=1}^n e_i)$$

Proposition 5.3. : $(e_i, e'_i)_{i=1, \dots, n}$ est une semi-décompo-

sition de l'unité si et seulement si $(e_i - e'_i)_{i=1, \dots, n}$

est une décomposition de l'unité de $S(A)$.

$$\left[(1 + \sum_{i=1}^n e'_i) Z_A (\sum_{i=1}^n e_i) \right] \Leftrightarrow \left[\theta(1) + \sum_{i=1}^n \theta(e'_i) = \sum_{i=1}^n \theta(e_i) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\theta(1) = \sum_{i=1}^n (\theta(e_i) - \theta(e'_i)) = \sum_{i=1}^n (e_i - e'_i) \right]$$

Définition 5.4. : On dira qu'une semi-décomposition $(e_i, e'_i)_{i=1, \dots, n}$ de l'unité de A est plus fine qu'une autre semi-décomposition $(f_j, f'_j)_{j=1, \dots, m}$ si et seulement si chaque (f_j, f'_j) admet une semi-décomposition contenue dans $(e_i, e'_i)_{i=1, \dots, n}$ c.à.d. qu'il existe $(e_{i_1}, e'_{i_1}) \dots (e_{i_s}, e'_{i_s})$

tels que :

$$(f_j + \sum_{\ell=1}^s e'_{i_\ell}) Z_A (f'_j + \sum_{\ell=1}^s e_{i_\ell})$$

Proposition 5.4. : $(e_i, e'_i)_{i=1, \dots, n}$ est plus fine que

$(f_j, f'_j)_{j=1, \dots, m}$ si et seulement si

$(e_i - e'_i)_{i=1, \dots, n}$ est plus fine que $(f_j - f'_j)$.

c'est immédiat.

Proposition 5.5. : Si $(e_i, e'_i)_{i=1 \dots n}$ et $(f_j, f'_j)_{j=1 \dots m}$

sont deux semi-décompositions de l'unité de A,

alors $(e_i f_j + e'_i f'_j, e_i f'_j + e'_i f_j)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$

est une semi-décomposition de l'unité de A plus fine que chacune des semi-décompositions considérées.

- Tout d'abord, pour tout i et tout j, $(e_i f_j + e'_i f'_j, e_i f'_j + e'_i f_j)$ est un idempotent car $(e_i f_j + e'_i f'_j) - (e_i f'_j + e'_i f_j) = (e_i - e'_i)(f_j - f'_j)$. Le produit de deux idempotents dans un anneau est encore un idempotent ce qui prouve que $(e_i f_j + e'_i f'_j, e_i f'_j + e'_i f_j)$ est idempotent.

- Ces idempotents sont orthogonaux deux à deux. Ceci provient du fait que le produit de deux tel idempotents contient le produit d'un $(e_{i_1} - e'_{i_1})$ et d'un $(e_{i_2} - e'_{i_2})$.

On a enfin :

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n (e_i - e'_i) \\ 1 &= \sum_{j=1}^m (f_j - f'_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{et} \quad \begin{aligned} (e_i - e'_i) &= \sum_{j=1}^m (e_i - e'_i) (f_j - f'_j) \\ 1 &= \sum_{i,j=1}^{n,m} (e_i - e'_i) (f_j - f'_j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (e_i f_j + e'_i f'_j, e_i f'_j + e'_i f_j)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$ est donc une

semi-décomposition de l'unité de A plus fine que $(e_i, e'_i)_{i=1 \dots n}$ et $(f_j, f'_j)_{j=1 \dots m}$.

Proposition 5.6. : Si A est artinien, il existe une semi-décomposition de l'unité de A plus fine que toute autre semi-décomposition.

En effet, si A est artinien S(A) l'est aussi. L'unité de S(A) admet donc une décomposition plus fine que toute autre décomposition. Cette décomposition de l'unité de S(A) induit une semi-décomposition de l'unité de A (proposition 5.3.) et cette semi-décomposition est plus fine que toute autre semi-décomposition. (proposition 5.4.).

Chapitre IV

Demi-modules et demi-anneaux noethériens

§ 1 Demi-modules noethériens :

Soient A un demi-anneau, M un A -demi-module et R une congruence simplifiante sur M . On va étudier la notion de chaînes croissantes de congruences simplifiantes.

Définition 1.1. : On dira que M est R -noetherien si, et seulement si toute suite croissante de congruences simplifiantes, toutes contenues dans R , est stationnaire.

On dira que M est noetherien si, et seulement si M est M -noetherien où M désigne la congruence amorphe sur M .

Donc M est noetherien si, et seulement si toute suite croissante de congruences simplifiantes sur M est stationnaire.

Proposition 1.1. : M est R -noetherien si, et seulement si $M(R)$ est noetherien en tant que $S(A)$ -module.

En effet toute suite de sous-modules de $M(R)$ est une suite de sous-modules de $S(M)$. Elle est donc de la forme $M(R_0) \subseteq M(R_1) \subseteq \dots \subseteq M(R_n) \subseteq \dots \subseteq M(R)$

Il en résulte une suite croissante de congruences simplifiantes sur M , toutes contenues dans R . Comme M est R -noetherien, cette suite est stationnaire. Il en est de même pour celle des $M(R_i)$. $M(R)$ est donc noetherien. Réciproquement soit $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_n \subseteq \dots \subseteq R$ une suite

croissante de congruences simplifiantes sur M toutes contenues dans R .

La suite $M(R_0) \subseteq M(R_1) \subseteq \dots \subseteq M(R_n) \subseteq \dots$ est une suite croissante de sous-modules de $M(R)$ qui est noetherien. Cette suite est donc stationnaire et il en est de même de la première.

Corollaire : M est noetherien si, et seulement si $S(M)$ est noetherien.

Proposition 1.2. : M est R -noetherien si, et seulement si, tout ensemble non vide de congruences simplifiantes sur M , toutes contenues dans R , admet un élément maximal.

En effet, tout ensemble non vide de congruences simplifiantes sur M , toutes contenues dans R , donne un ensemble non vide de sous-modules de $M(R)$ et vice versa. Comme la propriété est vraie pour les modules, la proposition (1.1.) la rend vraie pour les demi-modules.

Proposition 1.3. : Soit M un A -demi-module noetherien. On a :

- (i) - M est R -noetherien pour toute congruence simplifiante R sur M
- (ii) - Toute image homomorphe de M est noetherienne.

(i) est évident et (ii) découle de la proposition (2.1.3.) du chapitre I. On peut donner une autre démonstration de (ii). En effet, soient M' un autre A -demi-module et $f : M \rightarrow M'$ un homomorphisme de M sur M' .

Considérons le diagramme suivant :

f étant surjectif, $S(f)$ est surjectif.

D'où $S(M') = S(f)(S(M))$. On a maintenant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda' \\ S(M) & \xrightarrow{S(f)} & S(M') \end{array}$$

M est noetherien $\Rightarrow S(M)$ est noetherien $\Rightarrow S(f)(S(M)) = S(M')$ est noetherien $\Rightarrow M'$ est noetherien.

Proposition 1.4. : S'il existe une congruence simplifiante R sur M telle que M soit R -noetherien et M/R soit noetherien, M est alors noetherien.

Considérons le diagramme suivant :

si M est R -noetherien et si M/R est noetherien, $M(R)$ serait noetherien et $S(M/R) \simeq S(M)/_{M(R)}$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & M/R \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda' \\ S(M) & \xrightarrow{S(p)} & S(M/R) \end{array}$$

aussi. Il en résulte que $S(M)$ est noetherien, donc que M est noetherien.

Proposition 1.5. : Si N est un sous-demi-module de M et si R_N désigne la congruence modulo N . On a :

N est noetherien $\Rightarrow M$ est R_N -noetherien.

Il suffit de prouver que si N est noetherien, $M(R_N)$ l'est aussi. Le lemme suivant va nous résoudre la question :

Lemme : $M(R_N) = S(i)(S(N))$

où $i : N \rightarrow M$ est l'injection canonique.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \lambda \\ S(N) & \xrightarrow{S(i)} & S(M) \end{array}$$

En effet :

$(x - y) \in M(R_N) \Leftrightarrow x R_N y \Leftrightarrow x \equiv y \text{ modulo } N \Leftrightarrow$ il existe $(n, n') \in N \times N$ et $m \in M$ tels que :

$$x + n + m = y + n' + m \Leftrightarrow (x - y) = (i(n) - i(n')) = S(i)(n - n')$$

$\Leftrightarrow$ il existe $(n - n') \in S(N) ; [(x - y) = S(i)(n - n')]$

$\Leftrightarrow (x - y) \in S(i)(S(N)).$

Revenons à notre proposition : Si N est noetherien $S(N)$ et par suite $S(i)(S(N)) = M(R_N)$ le seront aussi. Il en résulte que M sera R_N -noetherien.

Proposition 1.6. : Si M est la somme d'une famille finie de sous-demi-modules tous noetheriens, M est alors noetherien.

On peut se contenter de $M = M_1 + M_2$. On va noter R_1 (resp. R_2) la congruence modulo M_1 (resp. M_2) au lieu de R_{M_1} (resp. R_{M_2}).

Lemme : $S(M_1 + M_2) = M(R_1) + M(R_2)$.

En effet soit $(x - y) \in S(M_1 + M_2)$. x (resp. y) étant dans $M_1 + M_2$ s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ (resp. $y = y_1 + y_2$) avec $x_i \in M_i$ (resp. $y_i \in M_i$) où $i = 1, 2$. Il en résulte $(x - y) = ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$. Or on a : $x_i R_i y_i$ ($i = 1, 2$) donc $(x_i - y_i) \in M(R_i)$ ($i = 1, 2$). On en déduit $(x - y) \in M(R_1) + M(R_2)$ et par suite :

$$S(M) = S(M_1 + M_2) \subseteq M(R_1) + M(R_2) \subseteq S(M)$$

Revenons à notre proposition : Si M_1 et M_2 sont noetheriens M est alors R_1 -noetherien et R_2 -noetherien. Il s'ensuit que $M(R_1)$ et $M(R_2)$ sont noetheriens, donc $S(M) = M(R_1) + M(R_2)$ aussi. On en déduit, alors, que M est noetherien.

Proposition 1.7. : M est noetherien si, et seulement si toute congruence simplifiante sur M est de type fini.

La démonstration repose sur le fait que M est noetherien si, et seulement si $S(M)$ est noetherien d'une part et sur le fait qu'une congruence simplifiante R sur M est de type fini si, et seulement si $M(R)$ est de type fini, d'autre part.

Ainsi, toutes les propriétés fondamentales des modules noetheriens sont valables (après arrangement) pour les demi-modules. Ce fait va rester valable pour les demi-anneaux comme on va le voir.

§ 2 Demi-anneaux noetheriens :

Soient A un demi-anneau unitaire et R (resp. T) une congruence à gauche (resp. à droite) simplifiante sur A .

Définition 2.1. : On dira que A est R -noetherien à gauche (resp. T -noetherien à droite) si, et seulement si le A -demi-module à gauche (resp. à droite) A est R -noetherien (resp. T -noetherien).

On dira que A est noetherien à gauche (resp. à droite) si, et seulement si le A -demi-module à gauche (resp. à droite) A est noetherien.

Ceci nous permet d'énoncer certains résultats :

Proposition 2.1. : A est R -noetherien à gauche (resp. T -noetherien à droite) si, et seulement si tout ensemble non vide de congruences à gauche (resp. à droite) simplifiantes, toutes contenues dans R (resp. T), admet un élément maximal.

Proposition 2.2. : Toute image homomorphe d'un demi-anneau noetherien à gauche (resp. à droite) est noetherienne à gauche (resp. à droite).

Proposition 2.3. : Un demi-anneau est noetherien à gauche (resp. à droite) si, et seulement si toute congruence à gauche (resp. à droite) simplifiante sur A est de type fini.

Exemple : $\mathbb{N}$ est un semi-anneau noetherien à droite et à gauche.

On peut aussi établir les propositions suivantes :

Proposition 2.4. : Le produit d'un nombre fini de demi-anneaux noetheriens à gauche (resp. à droite) est noetherien à gauche (resp. à droite).

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de demi-anneaux et soit $A = \prod_{i \in I} A_i$.
On a : $S(A) \simeq \prod_{i \in I} S(A_i)$. D'où si, pour tout $i \in I$, A_i est noetherien à gauche (resp. à droite) $S(A_i)$ l'est aussi, donc aussi $\prod_{i \in I} S(A_i) \simeq S(A)$ ce qui montre que A est noetherien à gauche (resp. à droite).

Proposition 2.5. : Si A est noetherien à gauche (resp. à droite) et si M est un A-demi-module à gauche (resp. à droite) de type fini, M est alors *noetherien*.

Pour prouver cette proposition, on commence par prouver le lemme suivant :

Lemme : Si M est de type fini, $S(M)$ l'est aussi.

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un système de générateurs de M sur A. Tout $x \in M$ s'écrit alors $x = \sum a_i x_i$. Il en résulte que tout $(x - y) \in S(M)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (x - y) &= ((\sum a_i x_i) - (\sum b_j x_j)) = \lambda(\sum a_i x_i) - \lambda(\sum b_j x_j) \\ &= \sum \lambda(a_i x_i) - \sum \lambda(b_j x_j) = \sum \theta(a_i) \lambda(x_i) - \sum \theta(b_j) \lambda(x_j) \\ &= \sum (\theta(a_i) - \theta(b_j)) \lambda(x_i) \end{aligned}$$

Les $\{\lambda(x_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$ engendrent, donc, $S(M)$ sur $S(A)$.

Revenons à notre proposition. Si A est noetherien à gauche (resp. à droite) et M est un A -demi-module à gauche (resp. à droite) de type fini, $S(A)$ sera noetherien à gauche (resp. à droite) et $S(M)$ un $S(A)$ -module à gauche (resp. à droite) de type fini. Il en résulte que $S(M)$ est noetherien et par suite que M est noetherien.

§ 3 Théorème de Hilbert :

On doit définir d'abord ce que c'est un polynôme sur un demi-anneau. Soit A un demi-anneau commutatif unitaire.

Définition 3.1. : On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans A toute somme formelle finie $\sum_{i \in I} a_i X^i$ où les (a_i) sont dans A , I une partie finie de $\mathbb{N}$ et $X = 1$.

Soit B l'ensemble de ces polynômes. On définit sur B la structure suivante :

Désignons d'abord, pour tout $f \in B$, par $I(f)$ l'ensemble des indices qui entrent dans l'expression de f .

Structure sur B :

Soient $f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i$ et $g(X) = \sum_{i \in I(g)} b_i X^i$ deux éléments de B .

1 - Egalité : $f(X) = g(X) \Leftrightarrow I(f) = I(g)$ et $(\forall i \in I(f)) [a_i = b_i]$

2 - Addition : $f(X) + g(X) = \sum_{i \in I(f+g)} c_i X^i$ où

- $I(f + g) = I(f) \cup I(g)$

- $c_i = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i \in I(f) \cap I(g) \\ a_i & \text{si } i \in I(f) \text{ et } i \notin I(g) \\ b_i & \text{si } i \notin I(f) \text{ et } i \in I(g). \end{cases}$

3 - Multiplication :

$$f(X) g(X) = \sum_{i \in I(fg)} C_i X^i \text{ où}$$

$$- I(fg) = \{ m+n / m \in I(f), n \in I(g) \}$$

$$- C_i = \sum_{p+q=i} a_p b_q \text{ où } a_p b_q \text{ sont les produits possibles.}$$

On vérifie facilement que B, muni de cette structure, est un demi-anneau commutatif unitaire. Son unité est le polynôme $f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i$ où $I(f) = \{0\}$ et $a_0 = 1$.

Soit, d'autre part, $\varphi : A \rightarrow B$ l'application de A dans B qui à $a \in A$ fait correspondre le polynôme $\sum_{i \in I(f)} a_i X^i$ où $I(f) = \{0\}$ et $a_0 = a$. φ est visiblement un homomorphisme injectif. On peut donc plonger A dans B en identifiant a à $\varphi(a)$. Dans la suite, on supposera A plongé dans B que nous noterons $A[X]$.

Proposition 3.1. : Soit $f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i$ dans $A[X]$. On a :

$$f(X) \in Z(A[X]) \Leftrightarrow (\forall i \in I(f)) [a_i \in Z(A)].$$

En effet,

supposons d'abord $f(X)$ dans $Z(A[X])$, il existe alors un $g(X) \in A[X]$ tel que $f(X) + g(X) = g(X)$ c'est-à-dire $\sum_{i \in I(f)} a_i X^i + \sum_{i \in I(g)} b_i X^i = \sum_{i \in I(g)} b_i X^i$

Il en résulte immédiatement :

$$- I(f + g) = I(f) \cup I(g) = I(g) \Leftrightarrow I(f) \subseteq I(g)$$

$$- (\forall i \in I(f)) [a_i + b_i = b_i] \Leftrightarrow (\forall i \in I(f)) [a_i \in Z(A)].$$

Réciproquement supposons que, pour tout $i \in I(f)$, a_i soit dans $Z(A)$. On peut, alors, trouver, pour tout $i \in I(f)$, un $b_i \in A$ tel que $a_i + b_i = b_i$

$$\text{il en résulte : } \sum_{i \in I(f)} a_i X^i + \sum_{i \in I(f)} b_i X^i = \sum_{i \in I(f)} (a_i + b_i) X^i$$

$$= \sum_{i \in I(f)} b_i X^i \text{ ce qui exprime que } f(X) \text{ est dans } Z(A[X]).$$

Proposition 3.2. : Soit $u ; A \rightarrow A'$ un homomorphisme de A dans un autre demi-anneau commutatif unitaire s'il existe un $x' \in A'$ tel que x' ne soit pas dans $u(A)$, il existe alors un homomorphisme unique $\hat{u} ; A[X] \longrightarrow A'$ tel que $\hat{u}(X) = x'$ et le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ \downarrow \varphi & \nearrow \hat{u} & \\ A[X] & & \end{array}$$

Définition de $\hat{u}$:

$$\hat{u}\left(\sum_{i \in I(f)} a_i X^i\right) = \sum_{i \in I(f)} u(a_i) x'^i$$

On vérifie facilement que $\hat{u}$ est un homomorphisme.

De l'autre côté : $u(X) = x'$ et :

$$(\forall a \in A) [(\hat{u} \circ \varphi)(a) = \hat{u}\left(\sum_{i \in I(f)} a_i X^i\right)] \text{ où } I(f) = \{0\} \text{ et } a_0 = a$$

$$\Rightarrow (\forall a \in A) [(\hat{u} \circ \varphi)(a) = u(a)] \Rightarrow \hat{u} \circ \varphi = u$$

Montrons maintenant que $\hat{u}$ est unique.

S'il existe un homomomorphisme $v ; A[X] \longrightarrow A'$ tel que $v(X) = x'$ et

$v \circ \varphi = u$ on aura :

$$(\forall f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i \in A[X] [f(X) = \sum_{i \in I(f)} \varphi(a_i) X^i])$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\forall f(X) \in A[X]) \left[v(f(X)) &= v\left(\sum_{i \in I(f)} \varphi(a_i) X^i\right) = \sum_{i \in I(f)} v \circ \varphi(a_i) v(X)^i \right. \\ &= \sum_{i \in I(f)} u(a_i) x'^i = \hat{u}(f(X)) \left. \right] \Rightarrow v = \hat{u}. \end{aligned}$$

Corollaire : Si $u ; A \longrightarrow A'$ est un homomorphisme de A dans un autre demi-anneau commutatif et unitaire, il existe un homomorphisme unique $\hat{u} ; A[X] \longrightarrow A'[Y]$ tel que $\hat{u}(X) = Y$ et que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ A[X] & \xrightarrow{\hat{u}} & A'[Y] \end{array}$$

On applique la proposition précédente à $A'[Y]$ et à l'homomorphisme $\varphi' \circ u$. Ceci est possible car Y n'est pas dans $(\varphi' \circ u)(A)$.

Proposition 3.3. : L'injection canonique $\varphi ; A \longrightarrow A[X]$ est exacte à gauche.

En effet :

$$\begin{aligned} [\varphi(a) \text{ } Z_{A[X]} \text{ } \varphi(b)] &\Rightarrow (\exists f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i \in A[X]) ; [\varphi(a) + f(X) \\ &= \varphi(b) + f(X)] \Rightarrow (\exists f(X) \in A[X]) ; \\ &[\varphi(a) + \sum_{i \in I(f)} a_i X^i = \varphi(b) + \sum_{i \in I(f)} a_i X^i] \\ &\Rightarrow [a = b \text{ si } 0 \notin I(f) \text{ et } a + a_0 = b + a_0 \text{ si } 0 \in I(f)] \\ &\Rightarrow [a \text{ } Z_A \text{ } b] \end{aligned}$$

Proposition 3.4. : $S(A[X])$ est isomorphe à $S(A)[X]$.

Une conséquence immédiate de la proposition (3.3.) est que $S(\varphi) ; S(A) \longrightarrow S(A[X])$ est un homomorphisme injectif.

Considérons $\Theta'(X)$ où $\Theta' ; A[X] \longrightarrow S(A[X])$ est l'homomorphisme canonique de $A[X]$ dans $S(A[X])$. Si $\Theta'(X)$ est dans $S(\varphi)(S(A))$, on peut trouver $(a - b) \in S(A)$ tel que $\Theta'(X) = S(\varphi)(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b)$. Il existe donc $(a, b) \in A \times A$ tel que : $\Theta'(X) = \Theta' \circ \varphi(a) - \Theta' \circ \varphi(b)$ c'est-à-dire $\Theta'(X) + \Theta' \circ \varphi(b) = \Theta'(X + \varphi(b)) = \Theta'(\varphi(a))$.

On en déduit qu'il existe $(a, b) \in A \times A$ tel que :

$$(X + \varphi(b)) \text{ } Z_{A[X]} \text{ } \varphi(a). \text{ C'est-à-dire qu'il existe}$$

$$f(X) = \sum_{i \in I(f)} a_i X^i \in A[X] \text{ tel que :}$$

$$X + \varphi(b) + \sum_{i \in I(f)} a_i X^i = \varphi(a) + \sum_{i \in I(f)} a_i X^i.$$

On en déduit : $a = b$ si $0 \notin I(f)$, $a + a_0 = b + b_0$

si $0 \in I(f)$, $1 \in I(f)$ et $1 + a_1 = a_1$

Il en résulte : $a \text{ } Z_A \text{ } b$ et $1 \in Z(A)$ ce qui implique

$$0 = (a - b) = \Theta'(X) \text{ et } A = Z(A).$$

Donc si $\theta'(X) \in S(\varphi)(S(A))$, $\theta'(X) = 0$ et $A = Z(A)$.

Dans ce cas nous avons : $S(A) = \{0\}$ $A[X] = Z(A[X])$

donc aussi $S(A[X]) = \{0\}$ c'est-à-dire $S(A)[X] \simeq S(A[X])$.

Si $\theta'(X)$ n'est pas dans $S(\varphi)(S(A))$, il existe un homomorphisme unique

$g : S(A)[X] \longrightarrow S(A[X])$

tel que $g \circ i = S(\varphi)$ et $g(X) = \theta'(X)$

où $i : S(A) \longrightarrow S(A)[X]$ est l'injection canonique.

De l'autre côté, on peut prolonger

l'homomorphisme $\theta : A \rightarrow S(A)$ en un

homomorphisme $\hat{\theta} : A[X] \rightarrow S(A)[X]$

tel que : $\hat{\theta}(X) = X$ et $\hat{\theta} \circ \varphi = i \circ \theta$ et ceci grâce au corollaire de la proposition (3.2.).

La propriété universelle nous donne un homomorphisme unique

$f : S(A[X]) \longrightarrow S(A)[X]$ tel que : $f \circ \theta' = \hat{\theta}$. On va prouver que f et g sont réciproques l'un de l'autre. En effet :

- $(f \circ g)(X) = f \circ \theta'(X) = \hat{\theta}(X) = X$. D'où

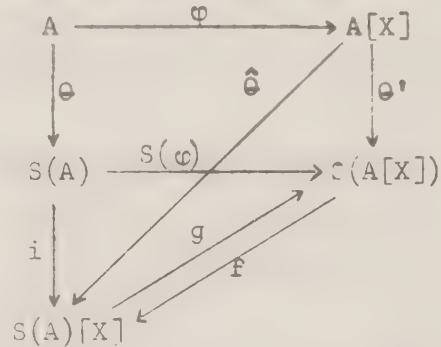
$$(f \circ g) \left(\sum_i (a_i - b_i) X^i \right) = \sum_i (f \circ g)(a_i - b_i) X^i$$

cherchons $(f \circ g)(a - b)$ pour $(a - b) \in S(A)$.

$$\begin{aligned} f \circ g(a - b) &= (f \circ g \circ i)(a - b) = (f \circ S(\varphi))(a - b) = (f \circ S(\varphi))(\theta(a) - \theta(b)) \\ &= (f \circ S(\varphi) \circ \theta)(a) - (f \circ S(\varphi) \circ \theta)(b) \\ &= (f \circ \theta' \circ \varphi)(a) - (f \circ \theta' \circ \varphi)(b) \\ &= (\hat{\theta} \circ \varphi)(a) - \hat{\theta} \circ \varphi(b) = i \circ \theta(a) - i \circ \theta(b) \\ &= i(\theta(a) - \theta(b)) = i(a - b) \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$(f \circ g) \left(\sum_j (a_j - b_j) X^j \right) = \sum_j i(a_j - b_j) X^j = \sum_j (a_j - b_j) X^j$$



D'où : $f \circ g = 1_{S(A)[X]}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 (g \circ f) \left(\sum_{i \in I_1} a_i X^i - \sum_{j \in I_2} b_j X^j \right) &= g \left(\hat{\theta} \left(\sum_{i \in I_1} a_i X^i \right) - \hat{\theta} \left(\sum_{j \in I_2} b_j X^j \right) \right) \\
 &= g \left(\hat{\theta} \left(\sum_{i \in I_1} \varphi(a_i) X^i \right) - \hat{\theta} \left(\sum_{j \in I_2} \varphi(b_j) X^j \right) \right) \\
 &= g \left(\sum_{i \in I_1} \hat{\theta} \circ \varphi(a_i) X^i - \sum_{j \in I_2} \hat{\theta} \circ \varphi(b_j) X^j \right) \\
 &= g \left(\sum_{i \in I_1} i \circ \theta(a_i) X^i - \sum_{j \in I_2} i \circ \theta(b_j) X^j \right) \\
 &= \sum_{i \in I_1} (g \circ i \circ \theta)(a_i) X^i - \sum_{j \in I_2} (g \circ i \circ \theta)(b_j) X^j \\
 &= \sum_{i \in I_1} (S(\varphi) \circ \theta)(a_i) X^i - \sum_{j \in I_2} (S(\varphi) \circ \theta)(b_j) X^j \\
 &= \sum_{i \in I_1} (\theta' \circ \varphi)(a_i) X^i - \sum_{j \in I_2} (\theta' \circ \varphi)(b_j) X^j = \theta' \left(\sum_{i \in I_1} \varphi(a_i) X^i \right) - \theta' \left(\sum_{j \in I_2} \varphi(b_j) X^j \right) \\
 &= \left(\sum_{i \in I_1} a_i X^i - \sum_{j \in I_2} b_j X^j \right)
 \end{aligned}$$

Il en résulte que $g \circ f$ est identique à $1_{S(A)[X]}$.

On en déduit : $S(A[X]) \simeq S(A)[X]$.

Corollaire : Si A est noetherien, $A[X]$ est noetherien.

En effet si A est noetherien, $S(A)$ est noetherien, donc $S(A)[X]$ aussi.

Il en résulte, vu l'isomorphisme entre $S(A)[X]$ et $S(A[X])$, que $S(A[X])$ est noetherien et par suite que $A[X]$ est noetherien.

§ 4 Congruences premières et maximales :

Soit A un demi-anneau commutatif et unitaire.

Définition 4.1. : On dira qu'une congruence P sur A est première si, et seulement si P vérifie l'axiome suivant :

$$(aa' + bb')P(ab' + ba') \Rightarrow aPb \text{ ou } a'Pb'.$$

Cette définition se lie, pour les congruences simplifiantes, à la notion d'idéal premier dans S(A).

Proposition 4.1. : Soit P une congruence simplifiante sur A. On a :
P est première si, et seulement si l'idéal M(P) est premier dans S(A).

En effet :

$$\begin{aligned} (aa' + bb')P(ab' + ba') &\Leftrightarrow ((aa' + bb') - (ab' + ba')) \in M(P) \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a' - b') \in M(P). \end{aligned}$$

D'où, si P est première et $(a - b)(a' - b') \in M(P)$ on aura $(aa' + bb')P(ab' + ba')$. Mais ceci implique : aPb ou $a'Pb'$, c'est-à-dire $(a - b) \in M(P)$ ou $(a' - b') \in M(P)$ ce qui veut dire que M(P) est premier.

Réciproquement, si M(P) est premier et si on a :

$$(aa' + bb')P(ab' + ba'), \text{ on aura } (a - b)(a' - b') \in M(P).$$

Mais ceci implique $(a - b) \in M(P)$ ou $(a' - b') \in M(P)$ c'est-à-dire aPb ou $a'Pb'$ ce qui prouve que P est première.

Exemples : Les congruences simplifiantes premières sur $\mathbb{N}$ sont les R telles que $M(R) = \mathbb{Z}p$. Désignons par R_p la congruence simplifiante unique telle que $M(R_p) = \mathbb{Z}p$.

Explicitons la forme de R_p .

$$a R_p b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{Z}p \Leftrightarrow (\exists (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) \text{ tel que :}$$

$$[(a - b) = (m - n)p] \Leftrightarrow (\exists (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) ; [a + np = b + mp]$$

Proposition 4.2. : Soient R et T deux congruences sur A telles que RT soit contenue dans une congruence première P. Alors R ou T est contenue dans P.

Sinon il existera $(a,b) \in A \times A$ et $(a',b') \in A \times A$ tels que l'on a : aRb , $a'Tb'$, $a \not\sim b$ et $a' \not\sim b'$. On en déduit $(aa' + bb')RT(ab' + ba')$, $a \not\sim b$, $a' \not\sim b'$ et par suite : $(aa' + bb')P(ab' + ba')$, $a \not\sim b$ et $a' \not\sim b'$ ce qui contredit la propriété de P d'être première.

Proposition 4.3. : Soit R une congruence simplifiante non première sur A .

Il existe deux congruences simplifiantes S et T telles que : $S \not\subseteq R$, $T \not\subseteq R$ et $ST \subseteq R$.

R étant une congruence simplifiante non première $M(R)$ est un idéal non premier de $S(A)$. Or dans les anneaux, on peut trouver deux idéaux $M(S)$ et $M(T)$ tels que : $M(S) \not\subseteq M(R)$, $M(T) \not\subseteq M(R)$ et $M(S)M(T) \subseteq M(R)$.

Il existe donc deux congruences simplifiantes S et T telles que :

$S \not\subseteq R$, $T \not\subseteq R$ et $ST \subseteq R$.

Pour pouvoir lier la notion de congruence première à certaines propriétés du demi-anneau quotient on va introduire les notions suivantes :

Définition 4.2. : Si A est un demi-anneau unitaire, on dira qu'un couple

$(a,b) \in A \times A$ tel que $a \not\sim_A b$ est inversible à droite (resp. à gauche) si, et seulement si il existe un couple $(c,d) \in A \times A$ vérifiant $c \not\sim_A d$ et tel que :

$$(ac + bd)Z_A(ad + bc + 1)$$

$$(\text{resp. : } (ca + db)Z_A(da + cb + 1))$$

On dira que $(a,b) \in A \times A$ tel que $a \not\sim_A b$ est régulier à droite (resp. à gauche) si et seulement si on a :

$$[(ca + db)Z_A(cb + da) \Rightarrow c \not\sim_A d]$$

$$(\text{resp. : } (ac + bd)Z_A(ad + bc) \Rightarrow c \not\sim_A d).$$

Proposition 4.4. : un $(a,b) \in A \times A$ tel que $a \not\sim_A b$ est inversible à droite

(resp. à gauche) si, et seulement si $(a - b)$ est inversible à droite (resp. à gauche) dans $S(A)$.

De même, un $(a,b) \in A \times A$ tel que $a \not\cancel{Z}_A b$ est régulier à droite (resp. à gauche) si, et seulement si $(a - b)$ n'est pas diviseur de zéro à droite (resp. à gauche).

Soit $(a,b) \in A \times A$ tel que $a \not\cancel{Z}_A b$. $(a - b)$ est alors non nul dans $S(A)$. D'où (a,b) est inversible à droite $\Leftrightarrow \exists (c,d) \in A \times A$; $\left[C \not\cancel{Z}_A d \text{ et } (ac + bd) \cancel{Z}_A (ad + bc + 1) \right] \Leftrightarrow (\exists (c - d) \in S(A))$; $[(c - d) \neq 0 \text{ et } (a - b)(c - d) = 1] \Leftrightarrow (a - b)$ est inversible à droite dans $S(A)$.

On démontre de la même façon l'autre partie.

Proposition 4.5. : Soit P une congruence simplifiante sur A commutatif :
 P est première si, et seulement si, dans $A/P \times A/P$, tout couple $(\bar{a}, \bar{b})$ tel que $\bar{a} \neq \bar{b}$ est régulier.

En effet :

P est première si, et seulement si $M(P)$ est premier donc si, et seulement si tout élément non nul de $S(A)/_{M(P)} \simeq S(A/P)$ n'est pas diviseur de zéro. Or ceci équivaut, d'après la proposition (4.4), à ce que tout couple $(\bar{a}, \bar{b}) \in A/P \times A/P$ tel que $\bar{a} \neq \bar{b}$ soit régulier ce qui prouve notre proposition.

Proposition 4.6. : Toute congruence simplifiante maximale sur A commutatif est première.

Car si R est une congruence simplifiante maximale, $M(R)$ est un idéal maximal de $S(A)$, il est donc premier.

Il en résulte que R est première.

Proposition 4.7. : Toute congruence à gauche (resp. à droite) simplifiante est contenue dans une congruence à gauche (resp. à droite) simplifiante maximale.

C'est immédiat à partir de la propriété analogue pour les anneaux.

Proposition 4.8. : Soit $f ; A \rightarrow A'$ un homomorphisme de A commutatif sur un autre demi-anneau commutatif unitaire A' . La correspondance biunivoque entre l'ensemble des congruences simplifiantes sur A' et celui des congruences simplifiantes sur A contenant R_f , fait correspondre les congruences premières (resp. maximales) aux congruences premières (resp. maximales).

Soit R' une congruence simplifiante sur A' .

On a :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta' \\ S(A) & \xrightarrow{S(f)} & S(A') \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x - y) \in M(f^{-1}(R')) &\Leftrightarrow x f^{-1}(R') y \Leftrightarrow f(x) R' f(y) \Leftrightarrow (f(x) - f(y)) \in M(R') \\ &\Leftrightarrow S(f)^{-1}(x - y) \in M(R') \Leftrightarrow (x - y) \in S(f)^{-1}(M(R')). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} R' \text{ est première (resp. maximale)} &\Leftrightarrow M(R') \text{ est premier (resp. maximal)} \\ &\Leftrightarrow S(f)^{-1}(M(R')) \text{ est premier (resp. maximal)} \Leftrightarrow M(\bar{f}^{-1}(R')) \text{ est premier} \\ &\text{(resp. maximal)} \Leftrightarrow \bar{f}^{-1}(R') \text{ est première (resp. maximale)}. \end{aligned}$$

§ 5 Congruences simplifiantes et premières associées à un demi-module :

Soient A un demi-anneau commutatif unitaire, M un A -demi-module et R une congruence simplifiante sur M .

Définition 5.1. : On dira qu'une congruence simplifiante et première P sur A est associée à R si, et seulement s'il existe

$$(x, y) \in M \times M \text{ tel que : } xRy \text{ et } P = O_x^y$$

O_x^y étant la congruence :

$$a O_x^y b \Leftrightarrow [(ax + by)Z_M(ay + bx)].$$

L'ensemble des congruences simplifiantes et premières associées à R sera noté $\text{Ass}(R)$.

On dira qu'une congruence simplifiante et première P sur A est associée à M si et seulement si P est associée à la congruence amorphe sur M . Leur ensemble sera noté $\text{Ass}(M)$.

On va tout de suite établir la relation entre $\text{Ass}(R)$ et $\text{Ass}(M(R))$.

Proposition 5.1. : $P \in \text{Ass}(R) \Leftrightarrow M(P) \in \text{Ass}(M(R))$

On a :

$P \in \text{Ass}(R) \Leftrightarrow P$ est première et $P = O_x^Y$ où $(x, y) \in M \times M$ vérifiant $xRy \Leftrightarrow M(P)$ est un idéal premier de $S(A)$ et $M(P) = M(O_x^Y) = (0 : (x-y))$ où $(x-y) \in M(R) \Leftrightarrow M(P) \in \text{Ass}(M(R))$.

Corollaire 1 : $\text{Ass}(M(R)) = M(\text{Ass}(R))$.

Corollaire 2 : $\text{Ass}(S(M)) = M(\text{Ass}(M))$.

Proposition 5.2. : Soit P une congruence simplifiante et première sur A .

P est dans $\text{Ass}(R)$ si, et seulement s'il existe $(x, y) \in M \times M$ tel que : xRy et $\text{Ass}(R_x^Y) = \{P\}$.

En effet :

$P \in \text{Ass}(R) \Leftrightarrow M(P) \in \text{Ass}(M(R)) \Leftrightarrow (\exists (x-y) \in M(R)) ; \text{Ass}(S(A)(x-y)) = \{M(P)\} \Leftrightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) ; [xRy \text{ et } \text{Ass}(M(R_x^Y)) = \{M(P)\}] \Leftrightarrow (\exists (x, y) \in M \times M) ; [xRy \text{ et } \text{Ass}(R_x^Y) = \{P\}]$.

Proposition 5.3. : Si A est noetherien on a :

$$\text{Ass}(R) \neq \emptyset \Leftrightarrow R \neq Z_M$$

En effet si A est noetherien et si $\text{Ass}(R) \neq \emptyset$, $S(A)$ est alors noetherien et $\text{Ass}(M(R)) = M(\text{Ass}(R)) \neq \emptyset$. Il en résulte que $M(R) \neq \{0\}$ c'est-à-dire $R \neq Z_M$ (Voir [9]).

Proposition 5.4. : T étant une autre congruence simplifiante sur M telle que $R \subseteq T$, on a :

$$\text{Ass}(R) \subseteq \text{Ass}(T) \subseteq \text{Ass}(R) \cup \text{Ass}(T/R).$$

On a :

$R \subseteq T \Rightarrow \text{Ass}(R) \subseteq \text{Ass}(T)$ c'est évident.

De l'autre côté :

$$R \subseteq T \Rightarrow M(R) \subseteq M(T) \Rightarrow \text{Ass}(M(R)) \subseteq \text{Ass}(M(T)) \subseteq \text{Ass}(M(R)) \cup \text{Ass}\left(\frac{M(T)}{M(R)}\right)$$

Pour achever la démonstration il suffit de prouver que $\frac{M(T)}{M(R)}$ est identique à $\frac{M(T/R)}{M(R)}$. En effet :

$$\begin{aligned} (p(x) - p(y)) \in M(T/R) \subseteq S(M/R) &\Leftrightarrow p(x) \text{ } T/R \text{ } p(y) \\ &\Leftrightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } p(x) + p(x') = p(y) + p(y')] \\ &\Leftrightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } (x + x')R(y + y')] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{P} & M/R \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda' \\ S(M) & \xrightarrow{S(p)} & S(M/R) \simeq S(M)/M(R) \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} (p(x) - p(y)) \in M(T/R) &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } (x + x')T(y + y')] \\ \text{car } R \subseteq T &\Rightarrow [xTy] \text{ car } T \text{ est simplifiante} \Rightarrow [(x - y) \in M(T)] \\ &\Rightarrow [S(p)(x - y) = (p(x) - p(y)) \in S(p)(M(T)) = \frac{M(T)}{M(R)}] \end{aligned}$$

Réciproquement

$$\begin{aligned} (p(x) - p(y)) \in \frac{M(T)}{M(R)} &\Rightarrow S(p)(x - y) \in \frac{M(T)}{M(R)} \Rightarrow (\exists (y' - x') \in M(T)) \\ [S(p)(y' - x') = (p(x) - p(y))] &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } (p(x) + p(x'))Z_{M/R}(p(y) + p(y'))] \\ &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } p(x + x') = p(y + y')] \text{ car } Z_{M/R} \text{ est l'égalité} \\ &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) ; [x'Ty' \text{ et } (x + x')R(y + y')] \\ &\Rightarrow (p(x) - p(y)) \in \frac{M(S/R)}{M(R)} \text{ d'après ce qui a été établi au début de la démonstration.} \end{aligned}$$

Corollaire : $\text{Ass}(R) \subseteq \text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(R) \cup \text{Ass}(M/R)$

Proposition 5.5. : Si M est la somme directe d'une famille finie de sous-demi-modules $(M_i)_{i \in I}$ on a :

$$\text{Ass}(M) = \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M_i)$$

$$\text{On a : } M = \bigoplus_{i \in I} M_i \simeq \coprod_{i \in I} M_i$$

d'où $S(M) \simeq \coprod_{i \in I} S(M_i)$. De plus chaque $S(M_i)$ est isomorphe à un sous-module de $S(M)$ car l'injection canonique $j_i : M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$ étant exacte en fait

$S(j_i)$ est injectif. On a donc : $S(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} S(M_i)$. Il en résulte

$$\begin{aligned} M(\text{Ass}(M)) &= \text{Ass}(S(M)) = \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(S(M_i)) = \bigcup_{i \in I} M(\text{Ass}(M_i)) \\ &= M\left(\bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M_i)\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \text{Ass}(M) = \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M_i).$$

Proposition 5.6. : Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille finie de congruences

simplifiantes telles que $\bigcap_{i \in I} R_i = Z_M$

Alors : $\text{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M/R_i)$.

$$\bigcap_{i \in I} R_i = Z_M \Rightarrow \bigcap_{i \in I} M(R_i) = \{0\} \Rightarrow \text{Ass}(S(M)) \subseteq \bigcup_{i \in I} \text{Ass}\left(\frac{S(M)}{M(R_i)}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Ass}(S(M)) \subseteq \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(S(M/R_i)) = \bigcup_{i \in I} M(\text{Ass}(M/R_i))$$

$$\Rightarrow \text{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M/R_i)$$

Proposition 5.7. : Si A est noetherien et si M est de type fini,

$\text{Ass}(M)$ est fini.

En effet, si A est noetherien et M est de type fini, $S(A)$ est alors noetherien et $S(M)$ est de type fini. Il en résulte que

$\text{Ass}(S(M)) = M(\text{Ass}(M))$ est fini. $\text{Ass}(M)$ est donc fini.

§ 6 Décomposition primaire :

Soient A un demi-anneau commutatif unitaire et noetherien, M un A -demi-module, P une congruence simplifiante et première sur A et R une congruence simplifiante sur M .

Définition 5.1. : On dira que R est P -primaire si, et seulement si

$$\text{Ass}(M/R) = \{P\}.$$

Proposition 5.1. : R est P -primaire $\Leftrightarrow M(R)$ est $M(P)$ -primaire.

Ceci est dû à ce que : $M(\text{Ass}(M/R)) = \text{Ass}(S(M/R)) = \text{Ass}(S(M)/M(R))$

Proposition 5.2. : Soit $(Q_i)_{i \in I}$ une famille de congruences simplifiantes sur M , si, pour tout $i \in I$, Q_i est P -primaire, alors $Q = \bigcap_{i \in I} Q_i$ est P -primaire.

En effet :

$$\begin{aligned} (\forall i \in I) [Q_i \text{ est } P\text{-primaire}] &\Rightarrow (\forall i \in I) [M(Q_i) \text{ est } M(P)\text{-primaire}] \\ &\Rightarrow [M(Q) = \bigcap_{i \in I} M(Q_i) \text{ est } M(P)\text{-primaire}] \Rightarrow [Q \text{ est } P\text{-primaire}]. \end{aligned}$$

Proposition 5.3. : Si M est de type fini, toute congruence simplifiante R sur M est l'intersection d'un nombre fini de congruences simplifiantes primaires.

Si M est de type fini, $\text{Ass}(M)$ est fini puisque A est noethérien (Proposition 5.7.).

De l'autre côté M étant de type fini, $S(M)$ est aussi de type fini. Comme $S(A)$ est noethérien, $M(R)$ est l'intersection d'un nombre fini de sous-modules primaires de $S(M)$. Il en résulte que R est l'intersection d'un nombre fini de congruences simplifiantes et primaires sur M .

Définition 5.2. : On appelle décomposition primaire d'une congruence simplifiante R sur M toute famille finie $(Q_i)_{i \in I}$ de congruences simplifiantes et primaires sur M telles que $R = \bigcap_{i \in I} Q_i$. La décomposition sera dite réduite si, et seulement si elle vérifie :

$$(1) - (\forall i \in I) \left[\bigcap_{j \neq i} Q_j \not\subset Q_i \right]$$

(ii) - $(\forall i \in I) \left[\text{Ass}(M/Q_i) = \{P_i\} \right]$ les (P_i) étant
distincts deux à deux.

La proposition (5.3.) prouve que toute congruence simplifiante R sur M admet une décomposition primaire si M est de type fini.

Proposition 5.4. : Une décomposition primaire d'une congruence simplifiante R sur M est réduite si, et seulement si la décomposition primaire correspondante de $M(R)$ est réduite.

$$\text{On a : } R = \bigcap_{i \in I} Q_i \Leftrightarrow M(R) = \bigcap_{i \in I} M(Q_i)$$

$$(i) - (\forall i \in I) \left[\bigcap_{j \neq i} Q_j \not\subset Q_i \right] \Leftrightarrow (\forall i \in I) \left[\bigcap_{j \neq i} M(Q_j) \not\subset M(Q_i) \right]$$

$$(ii) - (\forall i \in I) \left[\text{Ass}(M/Q_i) = \{P_i\} \right] \Leftrightarrow (\forall i \in I) \left[\text{Ass} \left(S^{(M)} / M(Q_i) \right) = \text{Ass} \left(S^{(M/Q_i)} \right) = \{P_i\} \right]$$

et les (P_i) sont distincts deux à deux si et seulement si les $(M(P_i))$ sont distincts deux à deux.

Proposition 5.5. : De toute décomposition primaire d'une congruence simplifiante R sur M , on peut extraire une décomposition primaire réduite de R .

Soit $R = \bigcap_{i \in I} Q_i$ une décomposition primaire de R . $M(R) = \bigcap_{i \in I} M(Q_i)$ est une décomposition primaire de $M(R)$. Or on peut extraire de cette décomposition, une décomposition primaire réduite de $M(R)$. Il lui correspond une décomposition primaire réduite de R obtenue à partir de la décomposition donnée.

Proposition 5.6. : Si M est de type fini et si en plus toute congruence simplifiante primaire sur A est maximale, il existe, pour chaque congruence simplifiante R sur M , une décomposition primaire réduite unique.

L'existence est assurée par les propositions (6.3.) et (6.5.).
Quant à l'unicité il suffit de prouver que les conditions de la proposition impliquent satisfaction par $S(A)$ et $S(M)$ des conditions qui assurent l'unicité dans les modules. En effet A noetherien implique que $S(A)$ est noetherien. D'autre part si toute congruence simplifiante et première sur A est maximale, tout idéal premier de $S(A)$ serait maximal. Mais $S(A)$ est noetherien. Il est donc aussi artinien. De l'autre côté M étant de type fini il est artinien et noetherien à la fois. Il est donc de longueur finie. (Voir [9])

§ 7 Exemples :

1 - Si P est une congruence simplifiante et première, P est P -primaire.

En effet

P étant première, A/P vérifie la propriété :

$[\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) \text{ régulier}]$. Donc $0 \frac{\bar{b}}{a}$ est égale à P car :

$$u 0 \frac{\bar{b}}{a} v \Leftrightarrow (u\bar{a} + v\bar{b}) = (u\bar{b} + v\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow (ua + vb)P(ub + va)$$

$$\Leftrightarrow u P v \quad \text{car on a } a \not\equiv b \text{ du fait que } \bar{a} \neq \bar{b}.$$

2 - Soit Q une congruence simplifiante sur A telle qu'il existe une seule congruence simplifiante et première $\mathfrak{m}$ telle que $Q \subseteq \mathfrak{m}$. Soit M un A -demi-module tel que QM (produit de Q et de la congruence amorphe sur M) ne soit pas amorphe. Alors QM est $\mathfrak{m}$ -primaire. En effet soit $P \in \text{Ass}(M/QM)$ il existe alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans M/QM tels que $\bar{x} \neq \bar{y}$ et $P = 0 \frac{\bar{y}}{x}$. Je dis que P contient Q . En effet $a Q b$ implique $(ax + by)QM(ay + bx)$ pour tout $(x, y) \in M \times M$. Donc $a Q b \Rightarrow a 0 \frac{\bar{y}}{x} b \Rightarrow a P b$.

Or l'unique congruence simplifiante et première contenant Q est $\mathfrak{m}$.

Il en résulte : $\text{Ass}(M/QM) = \{\mathfrak{m}\}$.

- 3 - Soit $\mathfrak{m}$ une congruence simplifiante maximale sur A et soit Q une congruence simplifiante sur A telle qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant : $\mathfrak{m}^n \subseteq Q \subseteq \mathfrak{m}$. Q est alors $\mathfrak{m}$ -primaire.

En effet $\mathfrak{m}$ est la seule congruence simplifiante sur A contenant Q.

Car s'il en existe un autre P, on aura : $\mathfrak{m}^n \subseteq Q \subseteq P$ ce qui impliquerait $\mathfrak{m} \subseteq P$ d'après la proposition (4.2.) donc $\mathfrak{m} = P$ puisque $\mathfrak{m}$ est maximal. L'exemple 2 achève la démonstration.

- 4 - Dans $\mathbb{N}$ si p est un nombre premier $R_p n$ est R_p -primaire pour tout $n \geq 1$.

En effet

$$M(R_p n) = \mathbb{Z}_p^n = (\mathbb{Z}_p)^n = M(R_p)^n = M((R_p)^n)$$

On a donc : $(R_p)^n \subseteq R_p n \subseteq R_p$ et on est dans le cas de l'exemple 3.

- 5 - On prend $A = \mathbb{N}$ $M = \mathbb{N}$, $R = R_n$

Soit $n = p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s}$ la décomposition de n en produit d'entiers premiers. On a :

$$M(R) = \mathbb{Z}n = \mathbb{Z} p_1^{i_1} \dots p_s^{i_s} = \bigcap_{j=1}^s (\mathbb{Z} p_j^{i_j}) = M \left(\bigcap_{j=1}^s R_{p_j}^{i_j} \right)$$

D'où $R = \bigcap_{j=1}^s R_{p_j}^{i_j}$ et les $R_{p_j}^{i_j}$ sont R_{p_j} -primaires.

Chapitre VI

Produit tensoriel

§ 1 Définitions :

Soient A un demi-anneau unitaire, E un A -demi-module à droite et F un A -demi-module à gauche. Soit M l'ensemble des combinaisons linéaires formelles finies des éléments de $E \times F$ à coefficients dans $\mathbb{N}$, demi-anneau des entiers positifs ou nuls. Tout $u \in M$ s'écrit sous la forme

$u = \sum_{(x,y) \in H} m_{x,y} (x,y)$ où H est une partie finie de $E \times F$ et où $m_{x,y}$ est dans $\mathbb{N}$ pour tout $(x,y) \in H$. On munit M de la structure suivante :

Structure sur M :

1 - Egalité : $\sum_{(x,y) \in H} m_{x,y} (x,y) = \sum_{(x,y) \in H'} m'_{x,y} (x,y) \Leftrightarrow H=H' \text{ et } (\forall (x,y) \in H=H')$

$$[m_{x,y} = m'_{x,y}].$$

2 - Addition : $\sum_{(x,y) \in H} m_{x,y} (x,y) + \sum_{(x,y) \in H'} m'_{x,y} (x,y) = \sum_{(x,y) \in L} l_{x,y} (x,y)$

où $L = H \cup H'$

$$\text{et } l_{x,y} = \begin{cases} m_{x,y} + m'_{x,y} & \text{si } (x,y) \in H \cap H' \\ m_{x,y} & \text{si } (x,y) \in H \text{ et } (x,y) \notin H' \\ m'_{x,y} & \text{si } (x,y) \notin H \text{ et } (x,y) \in H' \end{cases}$$

3 - Multiplication par un élément de $\mathbb{N}$:

$$n \cdot \sum_{(x,y) \in H} m_{x,y} (x,y) = \sum_{(x,y) \in H} (n \cdot m_{x,y}) \cdot (x,y).$$

On vérifie facilement que M , muni de cette structure, est un $\mathbb{N}$ -demi-module libre donc $((x,y))_{(x,y) \in E \times F}$ est une base.

Définition 1.1. : Une application $f ; E \times F \longrightarrow G$ de $E \times F$ dans un $\mathbb{N}$ -demi-module G sera dite : bilinéaire si, et seulement si f vérifie :

- (i) - $(\forall (x, x') \in E \times E)(\forall y \in F)[f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)]$
- (ii) - $(\forall x \in E)(\forall (y, y') \in F)[f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')]$

Proposition 1.1. : Soit $f ; E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans un $\mathbb{N}$ -demi-module G . Il existe, alors, un homomorphisme de $\mathbb{N}$ -demi-module unique $\hat{f} ; M \longrightarrow G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{f} & G \\ j \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ M & & \end{array}$$

où $j ; E \times F \longrightarrow M$ est l'injection qui à $(x, y) \in E \times F$ fait corres-

pondre $\sum_{(x', y') \in H} m_{x', y'}(x', y)$ avec $H = \{(x, y)\}$ et $m_{x, y} = 1$.

On définit $\hat{f}$ par : $\hat{f} \left(\sum_{(x, y) \in H} m_{x, y}(x, y) \right) = \sum_{(x, y) \in H} m_{x, y} f(x, y)$.

On vérifie facilement que $\hat{f}$ est bien l'homomorphisme recherché.

Considérons, maintenant, dans $M \times M$ la partie Q formée par les couples de l'une des formes suivantes :

- $((x + x', y), (x, y) + (x', y))$
- $((x, y) + (x', y), (x + x', y))$
- $((x, y + y'), (x, y) + (x, y'))$
- $((x, y) + (x, y'), (x, y + y'))$
- $((xa, y), (x, ay))$

où (x, x') parcourt $E \times E$, (y, y') parcourt $F \times F$ et a parcourt A . Soit R_0 la congruence sur M engendrée par Q . Soit d'autre part $\mathcal{B}$ la classe des applications bilinéaires de $E \times F$ dans un $\mathbb{N}$ -demi-module qui vérifient la condition additionnelle (c) suivante :

- (c) - $(\forall (x, y) \in E \times F)(\forall a \in A) [f(xa, y) = f(x, ay)]$.

Proposition 1.2. : $R_0 = \bigcap_{f \in \mathcal{B}} R_{\hat{f}}$

On commence par vérifier que pour tout $f \in \mathcal{B}$, $\hat{f}$ donne la même image des deux facteurs de chaque couple dans Q . Ceci prouve que R_0 est $R_{\hat{f}}$ pour tout $f \in \mathcal{B}$.

Réciproquement on va trouver un $f \in \mathcal{B}$ tel que $R_{\hat{f}} = R_0$ soit $G = M/R_0$ et $f ; E \times F \longrightarrow G$ l'application de $E \times F$ dans G comme étant $p \circ j$ où j est l'injection canonique de $E \times F \longrightarrow M$ et $p ; M \longrightarrow G$ est la surjection canonique. On vérifie facilement que f est dans $\mathcal{B}$ et que $R_{\hat{f}} = R$ car $R_{\hat{f}} = R_p$.

Définition 1.2. : On appelle produit tensoriel de E et de F tout couple

(H, φ) formé d'un $\mathbb{N}$ -demi-module H et d'un $\varphi \in \mathcal{B}$ qui va de $E \times F \longrightarrow H$ tel que si $f ; E \times F \longrightarrow G$ est dans $\mathcal{B}$, il existe un homomorphisme de $\mathbb{N}$ -demi-module unique $\bar{f} ; H \longrightarrow G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\quad} & G \\ \varphi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ H & & \end{array}$$

Remarque : On pourra définir un semi-produit tensoriel de E et de F en demandant à H et G d'être des $\mathbb{N}$ -semi-modules.

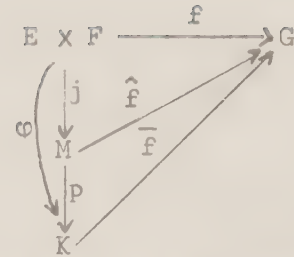
Proposition 1.3. : Il existe un produit tensoriel de E et de F .

Considérons $K = M/R_0$ et $\varphi ; E \times F \longrightarrow K$ l'application de $E \times F \longrightarrow K$ qui à $(x, y) \in E \times F$ fait correspondre la classe modulo R_0 de $j(x, y)$. On va prouver que (K, φ) est un produit tensoriel de E et de F . En effet : K est un $\mathbb{N}$ -demi-module et φ est dans $\mathcal{B}$. Soit, d'autre part, G un $\mathbb{N}$ -demi-module et soit $f ; E \times F \longrightarrow G$ un élément de $\mathcal{B}$. On a : $R_0 \subseteq R_{\hat{f}}$. Le corollaire 1 de la proposition (2.3.1.) du chapitre I prouve l'existence d'un homomorphisme unique $\bar{f} ; K \longrightarrow G$ tel que le diagramme inférieur soit commutatif. On a donc : $\bar{f} \circ \varphi = \bar{f} \circ p \circ j = \hat{f} \circ j = f$.

$\bar{f}$ rend, donc, commutatif le diagramme global.

De plus $\bar{f}$ est unique pour ça grâce à l'unicité, pour f , de $\hat{f}$ et, pour $\hat{f}$, de $\bar{f}$.

(K, φ) est donc un produit tensoriel de E et de F .



Proposition 1.4. : Tout produit tensoriel (M, π) de E et de F est isomorphe à (K, φ) .

Le raisonnement est classique.

Il existe donc un produit tensoriel et un seul à un isomorphisme près. Ce produit est (K, φ) . Dans la suite on dira que K est le produit tensoriel de E et de F . Il sera noté $E \otimes_A F$ et $E \otimes F$ si aucune confusion n'est à craindre. L'image par φ de $(x, y) \in E \times F$ sera notée $x \otimes y$. Les $\{x \otimes y\}_{(x, y) \in E \times F}$ forment un système de générateurs car les $\{(x, y)\}_{(x, y) \in E \times F}$ forment une base de M et $\pi : M \rightarrow E \otimes F$ est surjectif. De l'autre côté, si $f : E \times F \rightarrow G$ est dans $\mathcal{B}$ il existe $\bar{f} : E \otimes F \rightarrow G$ tel que : $\bar{f} \circ \varphi = f$. $\bar{f}$ agit sur les éléments de $E \otimes F$ de la façon suivante :

$$f \left(\sum_{(x, y) \in L} m_{x, y} x \otimes y \right) = \sum_{(x, y) \in L} m_{x, y} f(x, y)$$

Remarque : On peut démontrer qu'il existe un semi-produit tensoriel de E et de F et un seul. Ce semi-produit tensoriel est le quotient de M par la clôture simplifiante de R_0 . On a en plus :

Proposition 1.5. : Le semi-produit tensoriel de E et de F est isomorphe à $E \otimes F / Z_{E \otimes F}$

Pour l'établir, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme : Soient M un A -demi-module et R une congruence sur M . On a :

$$M/R \simeq M/R/Z_{M/R}$$

Soit $p : M \longrightarrow M/R$ la surjection canonique de M sur M/R . On a :

$M/R \simeq M/R/R$ d'après la proposition (2.3.2.) du chapitre I. Donc tout revient à prouver : $R/R = p(R) = Z_{M/R}$.

En effet :

$$\begin{aligned} p(x) Z_{M/R} p(y) &\Rightarrow (\exists p(z) \in M/R) ; [p(x) + p(z) = p(y) + p(z)] \\ &\Rightarrow (\exists z \in M) [(x + z) R (y + z)] \Rightarrow (\exists z \in M) [x + (y + z) + z = y + (x + z) + z \\ &\text{et } (y + z) R (x + z)] \Rightarrow x R_S y \Rightarrow p(x) R_S/R p(y). \end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} p(x) R_S/R p(y) &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) (\exists p(z) \in M/R) ; [x' R_S y' \text{ et } \\ p(x + p(x') + p(z) &= p(y) + p(y') + p(z)] \Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) \\ (\exists z \in M) [x' R_S y' \text{ et } (x + x' + z) R (y + y' + z)] &\Rightarrow (\exists (x', y') \in M \times M) \\ (\exists z \in M) ; [x' R_S y' \text{ et } (x + x' + z) R_S (y + y' + z)] &\Rightarrow [x R_S y] \\ &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) (\exists t \in M) ; [u R v \text{ et } x + u + t = y + v + t] \\ &\Rightarrow (\exists (u, v) \in M \times M) (\exists t \in M) [p(u) = p(v) \text{ et } p(x) + p(u) + p(t) = \\ &= p(y) + p(v) + p(t)] \Rightarrow p(x) Z_{M/R} p(y). \end{aligned}$$

On en déduit : $R_S/R = Z_{M/R}$.

§ 2 Foncteur produit tensoriel :

Soient A un demi-anneau unitaire, E et E' deux A -demi-modules à droite, F et F' deux A -demi-modules à gauche, $u : E \longrightarrow E'$ et $v : F \longrightarrow F'$ deux homomorphismes.

Proposition 2.1. : Il existe un homomorphisme unique :

$$u \otimes v : E \otimes F \longrightarrow E' \otimes F' \text{ tel que le diagramme suivant soit commutatif :}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E \times F & \xrightarrow{u \times v} & E' \times F' \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\
 E \otimes F & \xrightarrow{u \otimes v} & E' \otimes F'
 \end{array}$$

$u \times v$ étant l'application de $E \times F$ dans $E' \times F'$ qui à (x,y) fait correspondre $(u(x),v(y))$.

On considère l'application $\varphi' \circ (u \times v) ; E \times F \longrightarrow E' \otimes F'$ et on vérifie qu'elle est dans $\mathcal{B}$. Il existe donc un homomorphisme unique $g ; E \otimes F \longrightarrow E' \otimes F'$ tel que $g \circ \varphi = \varphi' \circ (u \times v)$ et $u \otimes v$ est notre homomorphisme g .

Notons D_g (resp. : D_d) la catégorie des A -demi-modules à gauche (resp. à droite) et $D_g \times D_d$ la catégorie produit :

Proposition 2.2. : La double correspondance qui à (E,F) objet de $D_d \times D_g$ fait correspondre $E \otimes F$ et à $(u,v) \in \text{Hom}((E,F), (E',F'))$, fait correspondre $u \otimes v \in \text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$ est un foncteur covariant défini sur la catégorie produit $D_d \times D_g$ et à valeur dans la catégorie des $\mathbb{N}$ -demi-modules.

La vérification est identique à celle faite dans le cas des modules.

Proposition 2.3. : Le foncteur produit tensoriel commute avec le foncteur coproduit.

Soient, en effet, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de A -demi-modules à droite et $(F_j)_{j \in J}$ une famille de A -demi-modules à gauche. Soient E le coproduit de la première famille, F celui de la seconde et G le coproduit de la famille $(E_i \otimes F_j)_{(i,j) \in I \times J}$. On va prouver que $E \otimes F$ est isomorphe à G .

En effet, soit $f ; E \times F \longrightarrow G$ l'application qui à $(\sum_i x_i, \sum_j y_j) \in E \times F$

fait correspondre $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j$ dans G . On vérifie facilement que f est dans

$\mathcal{B}$. Il existe donc un homomorphisme unique $g : E \otimes F \longrightarrow G$ tel que $g \circ \varphi = f$. Réciproquement, soient pour tout $i \in I$, $j_i : E_i \longrightarrow E$ et pour tout $j \in J$, $j'_j : F_j \longrightarrow F$ les injections canoniques. On a un homomorphisme $h_{i,j} : E_i \otimes F_j \longrightarrow E \otimes F$. $h_{i,j}$ est $j_i \otimes j'_j$, soit $h = \coprod h_{i,j}$. On va vérifier

que g et h sont deux applications réciproques l'une de l'autre. On a :

g fait correspondre à $(\sum_i x_i) \otimes (\sum_j y_j)$ l'élément $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j$ dans G et h

fait correspondre à $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j \in G$ l'élément $\sum h_{i,j} (x_i \otimes y_j) = (\sum_i x_i) \otimes (\sum_j y_j)$.

Comme les $\{x_i \otimes y_j\}$ engendrent G et les $(\sum_i x_i) \otimes (\sum_j y_j)$ engendrent $E \otimes F$

on obtient $g \circ h = 1_G$ et $h \circ g = 1_{E \otimes F}$. Il en résulte que $E \otimes F$ est isomorphe à G .

Proposition 2.4. : Le foncteur produit tensoriel commute avec le foncteur de modelisation.

Soient E un A -demi-module à droite et E' un A -demi-module à gauche.

On doit prouver que $S(E \otimes_A E')$ est isomorphe à $S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$. En effet,

soient $\lambda : E \longrightarrow S(E)$ et $\lambda' : E' \longrightarrow S(E')$ les homomorphismes canoniques.

On considère l'application $f : E \times E' \longrightarrow S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$ définie par

$f(x, x') = \lambda(x) \otimes \lambda'(x')$. f est dans $\mathcal{B}$ en effet :

- f est bilinéaire :

$$\begin{aligned} f(x + y, x') &= \lambda(x + y) \otimes \lambda'(x') = (\lambda(x) + \lambda(y)) \otimes \lambda'(x') \\ &= \lambda(x) \otimes \lambda'(x') + \lambda(y) \otimes \lambda'(x') = f(x, x') + f(y, x') \\ f(x, x' + y') &= \lambda(x) \otimes \lambda'(x' + y') = \lambda(x) \otimes (\lambda'(x') + \lambda'(y')) \\ &= \lambda(x) \otimes \lambda'(x') + \lambda(x) \otimes \lambda'(y') = f(x, x') + f(x, y'). \end{aligned}$$

- f vérifie la condition (c) :

$$\begin{aligned} f(xa, x') &= \lambda(xa) \otimes \lambda'(x') = \lambda(x) \otimes \varphi(a) \otimes \lambda'(x') \\ &= \lambda(x) \otimes \varphi(a) \otimes \lambda'(x') = \lambda(x) \otimes \lambda'(ax') = f(x, ax') \end{aligned}$$

et ceci pour x, y dans E , x', y' dans E' et $a \in A$.

D'autre part $S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$ est un N -demi-module car c'est un $\mathbb{Z}$ -module.

Il existe donc un homomorphisme $g : E \otimes_A E' \longrightarrow S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$ tel que :

$$g(x \otimes x') = \lambda(x) \otimes \lambda'(x').$$

Maintenant, comme $S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$ est un $S(N)$ -module, il existe un homomorphisme $\bar{g} : S(E \otimes_A E') \longrightarrow S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

où λ est l'homomorphisme canonique.

On a :

$$\begin{aligned} \bar{g}(x \otimes x' - y \otimes y') &= g(x \otimes x') - g(y \otimes y') \\ &= \lambda(x) \otimes \lambda'(x') - \lambda(y) \otimes \lambda'(y'). \end{aligned}$$

De l'autre côté on définit une application

$$h : S(E) \times S(E') \longrightarrow S(E \otimes_A E') \text{ par :}$$

$$h((x - y), (x' - y')) = ((x \otimes x' + y \otimes y') - (x \otimes y' + y \otimes x'))$$

cette définition ne dépendant pas du choix des représentants car si $(x - y) = (u - v)$ et $(x' - y') = (u' - v')$, il existe $t \in E$ et $t' \in E'$ tels que :

$$x + v + t = y + u + t \quad \text{et} \quad x' + v' + t' = u' + y' + t'$$

On en déduit :

$$x \otimes x' + v \otimes x' + t \otimes x' = u \otimes x' + y \otimes x' + t \otimes x'$$

$$u \otimes y' + y \otimes y' + t \otimes y' = x \otimes y' + v \otimes y' + t \otimes y'$$

$$v \otimes u' + v \otimes y' + v \otimes t' = v \otimes x' + v \otimes v' + v \otimes t'$$

$$u \otimes x' + u \otimes v' + u \otimes t' = u \otimes u' + u \otimes y' + u \otimes t'$$

Ajoutons ces égalités membres à membres. On obtient :

$$\begin{aligned} (x \otimes x' + y \otimes y') + (u \otimes v' + v \otimes u') + (v \otimes x' + u \otimes y' + v \otimes y' + u \otimes x' + \\ + t \otimes x' + t \otimes y' + v \otimes t' + u \otimes t') = (u \otimes u' + v \otimes v') + (x \otimes y' + y \otimes x') \\ + (v \otimes x' + u \otimes y' + v \otimes y' + u \otimes x' + t \otimes x' + t \otimes y' + v \otimes t' + u \otimes t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ce qui exprime : } ((x \otimes x' + y \otimes y') - (x \otimes y' + y \otimes x')) = \\ = ((u \otimes u' + v \otimes v') - (u \otimes v' + v \otimes u')) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que h est bilinéaire. Ce n'est pas difficile. h vérifie aussi la condition (c).

$$\begin{aligned} h((x - y)(a - b), (x' - y')) &= h((xa + yb) - (ya + xb), (x' - y')) \\ &= (xa + yb) \otimes x' + (ya + xb) \otimes y' - ((xa + yb) \otimes y' + (ya + xb) \otimes x') \\ &= (xa) \otimes x' + (yb) \otimes x' + (ya) \otimes y' + (xb) \otimes y' - ((xa) \otimes y' + (yb) \otimes y' + (ya) \otimes x' + (xb) \otimes x') \\ &= x \otimes (ax') + y \otimes (bx') + y \otimes (ay') + x \otimes (by') - (x \otimes (ay') + y \otimes (bx') + y \otimes (ax') + x \otimes (by')) \\ &= h((x - y), (ax' + by') - (ay' + bx')) \\ &= h((x - y), (a - b)(x' - y')). \end{aligned}$$

Il existe donc un homomorphisme $\bar{h} : S(E \otimes_{S(A)} S(E')) \rightarrow S(E \otimes_A E')$

$$\text{tel que } \bar{h}((x - y) \otimes (x' - y')) = (x \otimes x' + y \otimes y') - (x \otimes y' + y \otimes x')$$

On va, pour finir, prouver que $\bar{g}$ et $\bar{h}$ sont réciproques l'un de l'autre.

Il suffit de le vérifier sur les générateurs :

$$\begin{aligned} (\bar{g} \circ \bar{h})((x - y) \otimes (x' - y')) &= \bar{g}(x \otimes x' + y \otimes y' - (x \otimes y' + y \otimes x')) \\ &= g(x \otimes x' + y \otimes y') - g(x \otimes y' + y \otimes x') \\ &= g(x \otimes x') + g(y \otimes y') - (g(x \otimes y') + g(y \otimes x')) \\ &= \lambda(x) \otimes \lambda'(x') + \lambda(y) \otimes \lambda'(y') - \lambda(x) \otimes \lambda'(y') - \lambda(y) \otimes \lambda'(x') \\ &= (\lambda(x) - \lambda(y)) \otimes (\lambda'(x') - \lambda'(y')) \\ &= (x - y) \otimes (x' - y') \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (\bar{h} \circ \bar{g})(x \otimes x' - y \otimes y') &= \bar{h}(\lambda(x) \otimes \lambda'(x') - \lambda(y) \otimes \lambda'(y')) \\ &= \bar{h}(\lambda(x) \otimes \lambda'(x')) - \bar{h}(\lambda(y) \otimes \lambda'(y')) \\ &= x \otimes x' - y \otimes y'. \end{aligned}$$

Il en résulte que $S(E \otimes_A E')$ est isomorphe à $S(E) \otimes_{S(A)} S(E')$.

§ 3 Opérateurs sur le produit tensoriel :

Soient A et A' deux demi-anneaux unitaires, E un A -demi-module à gauche et F un (A, A') -bidemi-module, c'est-à-dire que F est à la fois un A -demi-module à gauche et un A' -demi-module à droite tel que :

$$(\forall a \in A) (\forall a' \in A') (\forall x \in F) [a(xa') = (ax)a']$$

On va définir sur $E \otimes_A F$ une structure de A' -demi-module à droite. En effet soit, pour tout $a' \in A'$, $u_{a'}$, l'homomorphisme du A -demi-module à gauche $F : x \rightsquigarrow xa'$.

$$\text{On a : } u_{a'+b'} = u_{a'} + u_{b'}, \text{ et } u_{a'b'} = u_{b'} \circ u_{a'}$$

$u_{a'}$, étant un endomorphisme du A -demi-module à gauche F $1_E \otimes u_{a'}$, est un endomorphisme de $E \otimes_A F$. On posera :

$$(\sum_i x_i \otimes y_i) a' = (1_E \otimes u_{a'}) (\sum_i x_i \otimes y_i)$$

On vérifie facilement que ceci définit, avec l'addition, sur $E \otimes_A F$ une structure de A' -demi-module à droite.

Si en plus E est un (A'', A) -bidemi-module, on peut munir, de la même manière, $E \otimes_A F$ d'une structure de A'' -demi-module. De plus $E \otimes_A F$ est un (A'', A') -bidemi-module. En effet : $(\forall a'' \in A'') (\forall a' \in A') (\forall z \in E \otimes_A F)$

$$\begin{aligned} [a''(za') &= (v_{a''} \otimes 1_F) \circ (1_E \otimes u_{a'}) (z) = (v_{a''} \otimes u_{a'}) (z) \\ &= (1_E \otimes u_{a'}) \circ (v_{a''} \otimes 1_F) (z) = (a''z)a'] \end{aligned}$$

Cas où A est commutatif :

Dans ce cas E et F sont tous les deux des (A, A) -bidemi-modules.

$E \otimes_A F$ sera lui-même un (A, A) -bidemi-module.

De plus on a : $(\forall a \in A) (\forall x \otimes y \in E \otimes F)$

$$[a(x \otimes y) = (ax) \otimes y = (xa) \otimes y = x \otimes (ay) = x \otimes (ya) = (x \otimes y)a]$$

en identifiant sur E et F les deux structures de A -demi-module à gauche et à droite.

§ 4 Produit tensoriel et suites exactes :

Proposition 4.1. : Soit $E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0^{(1)}$ une suite exacte de A-demi-modules à droite. Pour tout A-demi-module à gauche F la suite :

$$(2) \quad E' \otimes_A F \xrightarrow{u \otimes 1_F} E \otimes_A F \xrightarrow{v \otimes 1_F} E'' \otimes_A F \longrightarrow 0 \text{ est exacte.}$$

Si la suite (1) est exacte, la suite

$$(3) \quad S(E') \xrightarrow{S(u)} S(E) \xrightarrow{S(v)} S(E'') \longrightarrow 0$$

est exacte d'après la proposition (2.6.) du chapitre III.

Il en résulte que la suite :

$$(4) \quad S(E') \otimes_{S(A)} S(F) \xrightarrow{S(u) \otimes 1_{S(F)}} S(E) \otimes_{S(A)} S(F) \xrightarrow{S(v) \otimes 1_{S(F)}} S(E'') \otimes_{S(A)} S(F) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout A-demi-module à gauche F.

Lemme : Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} S(E' \otimes_A F) & \xrightarrow{S(u \otimes 1_F)} & S(E \otimes_A F) \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ S(E') \otimes_{S(A)} S(F) & \xrightarrow{S(u) \otimes 1_{S(F)}} & S(E) \otimes_{S(A)} S(F) \end{array}$$

où g et g' sont les isomorphismes canoniques établis dans la proposition

(2.4.). En effet soit $\lambda : F \longrightarrow S(F)$ l'homomorphisme canonique, nous avons :

$$(S(u) \otimes 1_{S(F)}) \circ g'(x' \otimes y - z' \otimes t) = (S(u) \otimes 1_{S(F)})(\lambda'(x') \otimes \lambda(y) - \lambda'(z') \otimes \lambda(t))$$

$$= (S(u) \otimes 1_{S(F)})(\lambda'(x') \otimes \lambda(y)) - (S(u) \otimes 1_{S(F)})(\lambda'(z') \otimes \lambda(y))$$

$$= (S(u) \circ \lambda')(x') \otimes \lambda(y) - (S(u) \circ \lambda')(z') \otimes \lambda(t)$$

$$= (\lambda \circ u)(x') \otimes \lambda(y) - (\lambda \circ u)(z') \otimes \lambda(t)$$

$$= g(u(x') \otimes y - u(z') \otimes t) = g \circ (u \otimes 1_F)(x' \otimes y - z' \otimes t)$$

Revenons à notre proposition. L'exactitude de la suite (4) implique l'exactitude de la suite :

$$S(E' \otimes_A F) \xrightarrow{S(u \otimes 1_F)} S(E \otimes F) \xrightarrow{S(u \otimes 1_F)} S(E'' \otimes F) \longrightarrow 0$$

grâce aux isomorphismes de la proposition (2.4.).

On en déduit que la suite (2) est exacte grâce à la proposition (2.7.)' du chapitre III.

Proposition 4.2. : Si $F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de A-demi-modules à gauche, la suite :

$$E' \otimes_A F \xrightarrow{1_E \otimes u} E \otimes_A F \xrightarrow{1_E \otimes v} E'' \otimes_A F \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout A-demi-module à droite E.

La démonstration est analogue à celle de la proposition (4.1.)

Proposition 4.3. : Si on a les deux suites exactes :

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0$$

et

$$F' \xrightarrow{s} F \xrightarrow{t} F'' \longrightarrow 0$$

où E', E, E'' sont des A-demi-modules à droite et F', F, F'' des A-demi-modules à gauche. Alors :

(i) - $v \otimes t$ est surjectif

(ii) - L'image réciproque par $v \otimes t$ de la congruence nulle $Z_{E'' \otimes F''}$ est identique à la congruence modulo :

$$\text{Im}(u \otimes 1_F) + \text{Im}(1_E \otimes s)$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E' \otimes F' & \xrightarrow{u \otimes 1_{F'}} & E \otimes F' & \xrightarrow{v \otimes 1_{F'}} & E'' \otimes F' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow 1_{E'} \otimes s & & \downarrow 1_E \otimes s & & \downarrow 1_{E''} \otimes s & & \\
 E' \otimes F & \xrightarrow{u \otimes 1_F} & E \otimes F & \xrightarrow{v \otimes 1_F} & E'' \otimes F & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow 1_{E'} \otimes t & & \downarrow 1_E \otimes t & & \downarrow 1_{E''} \otimes t & & \\
 E' \otimes F'' & \xrightarrow{u \otimes 1_{F''}} & E \otimes F'' & \xrightarrow{v \otimes 1_{F''}} & E'' \otimes F'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

ce diagramme est commutatif et ses lignes et ses colonnes sont exactes.

Il en résulte que $v \otimes 1_{F''}$ et $1_E \otimes t$ sont surjectifs, donc $v \otimes t = (v \otimes 1_{F''}) \circ (1_E \otimes t)$ est surjectif.

De l'autre côté soit m et n deux éléments de $E \otimes F$:

$$\begin{aligned}
 m(v \otimes t)^{-1}(Z_{E'' \otimes F''}) n &\Leftrightarrow (v \otimes t)(m) Z_{E'' \otimes F''} (v \otimes t)(n) \\
 &\Leftrightarrow (v \otimes 1_{F''}) \circ (1_E \otimes t)(m) Z_{E'' \otimes F''} (v \otimes 1_{F''}) \circ (1_E \otimes t)(n) \\
 &\Leftrightarrow (1_E \otimes t)(m) (v \otimes 1_{F''})^{-1}(Z_{E'' \otimes F''}) (1_E \otimes t)(n) \\
 &\Leftrightarrow (1_E \otimes t)(m) [\equiv] (1_E \otimes t)(n) \text{ modulo } \text{Im}(u \otimes 1_{F''})
 \end{aligned}$$

puisque la dernière ligne est exacte

$$\Leftrightarrow (1_E \otimes t)(m) [\equiv] (1_E \otimes t)(n) \text{ modulo } \text{Im}(u \otimes 1_{F''}) \circ (1_E \otimes t)$$

puisque $(1_E \otimes t)$ est surjectif.

$$\Leftrightarrow (1_E \otimes t)(m) [\equiv] (1_E \otimes t)(n) \text{ modulo } \text{Im}(1_E \otimes t) \circ (u \otimes 1_F)$$

puisque le diagramme est commutatif.

$\Leftrightarrow$ il existe m' et n' dans $E' \otimes F$ et un $z' \in E \otimes F''$

$$\begin{aligned}
 \text{tels que } (1_E \otimes t)(m) + (1_E \otimes t) \circ (u \otimes 1_F)(m') + z' &= \\
 &= (1_E \otimes t)(n) + (1_E \otimes t) \circ (u \otimes 1_F)(n') + z'
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1_E \otimes t)[m + (u \otimes 1_F)(m')] \cdot Z_{E \otimes F''} (1_E \otimes t)[n + (u \otimes 1_F)(n')]$$

$$\Leftrightarrow [m + (u \otimes 1_F)(m')][\equiv][n + (u \otimes 1_F)(n')] \text{ modulo } \text{Im}(1_E \otimes s)$$

$\Leftrightarrow$ il existe m'' et $n'' \in E \otimes F'$ et un $z \in E \otimes F$ tels que

$$m + (u \otimes 1_F)(m') + (1_E \otimes s)(m'') + z = n + (u \otimes 1_F)(n') + (1_E \otimes s)(n'') + z$$

$$\Leftrightarrow m [\equiv] n \text{ modulo } \text{Im}(u \otimes 1_F) + \text{Im}(1_E \otimes s).$$

Corollaire : Le semi-produit tensoriel de E'' et de F'' est isomorphe au quotient de $E \otimes F$ par la congruence modulo $\text{Im}(u \otimes 1_F) + \text{Im}(1_E \otimes s)$.

Il suffit de prouver que $E'' \otimes F'' / Z_{E'' \otimes F''}$ est isomorphe à

$E \otimes F / (v \otimes t)^{-1}(Z_{E'' \otimes F''})$ ce qui résultera du lemme suivant :

Lemme : Soit $f : M \longrightarrow M'$ un homomorphisme d'un A -demi-module M sur un autre M' . On a : $M' / Z_{M'}$ est isomorphe à $M / f^{-1}(Z_{M'})$.

On a $f(f^{-1}(Z_{M'})) \subseteq Z_{M'}$, il existe donc un homomorphisme unique

$$\bar{f} : M / f^{-1}(Z_{M'}) \longrightarrow M' / Z_{M'}, \text{ tel que : } \bar{f}(x) = \overline{f(x)}. \text{ (Proposition (2.3.1.)}$$

du chapitre I).

$\bar{f}$ est surjectif puisque f est surjectif. Il est aussi injectif :

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y}) \Rightarrow \overline{f(x)} = \overline{f(y)} = f(x) \cdot Z_{M'}, f(y) \Rightarrow x \cdot f^{-1}(Z_{M'}) y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}. \text{ c. q. f. d.}$$

Série : E

N° : 104

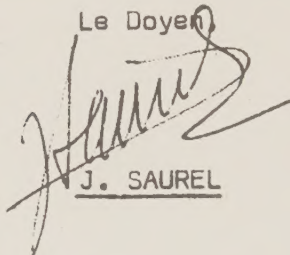
DEUXIEME THESE

"Anneaux normés commutatifs."

VU ET PERMIS D'IMPRIMER
(Décret n° 67-750 du 29 Août 1967)
Clermont-Fd, le 29 Mai 1969



Le Doyen


J. SAUREL

